

8

IL FORMALISMO HAMILTONIANO

La formulazione Hamiltoniana (o canonica) della Meccanica è alla base degli sviluppi della Meccanica Statistica, della Meccanica Quantistica e degli sviluppi più recenti della teoria dei Sistemi Dinamici. Gli strumenti utili ai fini dello sviluppo successivo della teoria Hamiltoniana sono da un lato l'algebra delle parentesi di Poisson, che nasce in modo spontaneo dalla ricerca di integrali primi, dall'altro il gruppo delle trasformazioni canoniche, che si può costruire partendo dalla ricerca di una classe di trasformazioni che mantenga invariata la forma Hamiltoniana delle equazioni.

La ricerca di integrali primi è interessante in quanto la loro conoscenza consente immediatamente di ricavare informazioni qualitative sulla dinamica del sistema. A questo scopo, le parentesi di Poisson consentono di ricondurre la ricerca di integrali primi alla soluzione di un'equazione alle derivate parziali. Inoltre, grazie alle parentesi di Poisson l'insieme delle variabili dinamiche risulta dotato di una struttura algebrica profonda ed interessante, che trova poi notevoli analogie nella Meccanica Quantistica.

Il ricorso alle trasformazioni canoniche ha lo scopo di porre il sistema di equazioni in una forma che consenta di pervenire in modo semplice alla soluzione. Il risultato più rilevante in quest'ambito è la possibilità di costruire una trasformazione canonica a partire da un'unica funzione, detta *funzione generatrice*. Quest'ultimo fatto conduce in modo spontaneo alla scrittura dell'equazione di Hamilton–Jacobi: si tratta di un'equazione che, ove risolta, fornisce la generatrice di una trasformazione che pone il sistema in una forma direttamente integrabile.

La connessione tra la conoscenza di integrali primi e l'integrazione mediante trasformazioni canoniche è stabilita dal teorema di Liouville: la soluzione dell'equazione di Hamilton–Jacobi può ricondursi ad una semplice operazione di quadratura quando si conosca un numero sufficiente di integrali primi del sistema.

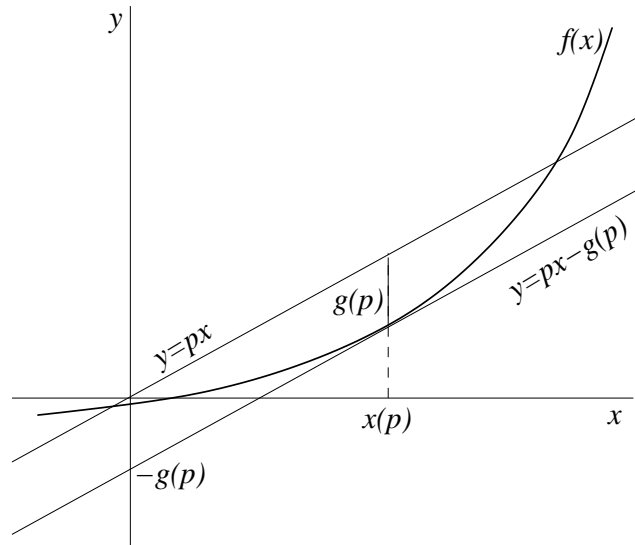


Figura 8.1. Il procedimento geometrico per la costruzione della trasformata di Legendre: per il punto $(x, f(x))$ si conduce la tangente al grafico della funzione $f(x)$, che ha pendenza $p = f'(x)$. L'ordinata all'origine della retta tangente si denota con $-g(p)$, e $g(p)$ è la trasformata di Legendre di $f(x)$.

8.1 La trasformata di Legendre

Prima di addentrarci nelle equazioni di Hamilton vogliamo discutere uno strumento geometrico che ci sarà utile sia nella deduzione della forma Hamiltoniana delle equazioni di moto, sia in altre circostanze: la trasformata di Legendre.

8.1.1 La trasformata di Legendre per una funzione di una variabile

Supponiamo assegnata una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, dove $U \subset \mathbb{R}$ è un aperto, e supponiamo che la funzione sia convessa, ovvero che sia di classe C^2 e che valga $f''(x) > 0$ in U . Il procedimento per la costruzione della trasformata di Legendre è illustrato in figura 8.1. Preso un punto $x \in U$ si definisce $p = f'(x)$, e si osserva che questa relazione può essere invertita, grazie alla convessità di $f(x)$, sicché risulta definita in modo univoco una funzione $x(p)$. Si traccia poi la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $(x, f(x))$. Si definisce infine la *trasformata di Legendre* di $f(x)$ come l'ordinata all'origine di questa retta cambiata di segno, ossia

$$(8.1) \quad g(p) = [px - f(x)] \Big|_{x=x(p)}.$$

Un modo alternativo per introdurre la stessa funzione è il seguente, anch'esso illustrato in figura 8.1. Assegnato $p \in \mathbb{R}$ ad arbitrio, si cerca il massimo della funzione di due variabili $G(p, x) = px - f(x)$, che rappresenta la distanza verticale (con segno) tra la retta per l'origine di pendenza p e il

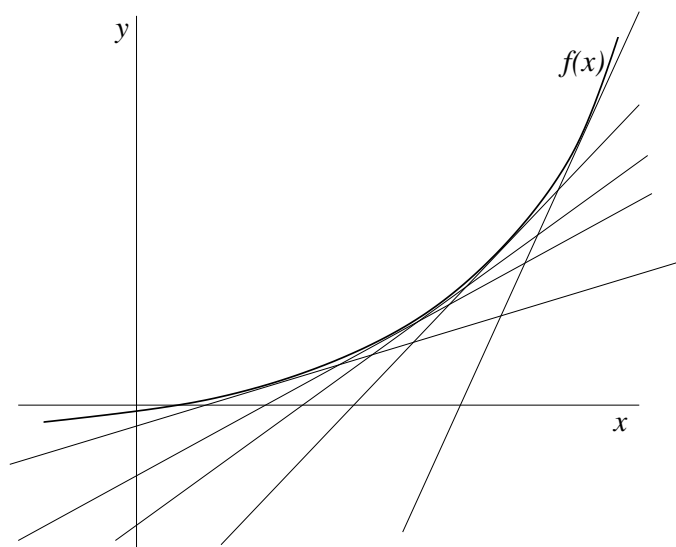


Figura 8.2. La funzione $f(x)$ è l'involuppo della famiglia di rette $y = px - g(p)$, dove $g(p)$ è la trasformata di Legendre di $f(x)$.

grafico di $f(x)$. Se tale massimo esiste, la condizione di convessità di $f(x)$ ne garantisce l'unicità, sicché risultano definiti sia $x(p)$, che è il punto x in cui il massimo viene raggiunto, sia la trasformata di Legendre $g(p) = G(p, x(p))$.

È interessante considerare la famiglia di rette $y = px - g(p)$, dove p è considerato come un parametro e $g(p)$ è la trasformata di Legendre di $f(x)$. Il procedimento stesso di costruzione della trasformata di Legendre mostra che il grafico di $f(x)$ è l'involuppo della famiglia di rette al variare di p . Questo fatto suggerisce che ci sia modo di invertire il processo di costruzione, generando $f(x)$ a partire da $g(p)$. In effetti ciò non è solo possibile, ma anche elementare. Si verifica infatti che la costruzione della trasformata di Legendre è un'operazione involutiva, ossia se $g(p)$ è la trasformata di $f(x)$, allora $f(x)$ è la trasformata di $g(p)$.

Per dimostrare questa affermazione dobbiamo anzitutto mostrare che la funzione $g(p)$ è convessa. Ciò segue dalla definizione stessa. Infatti, differenziando la (8.1) senza tener conto della sostituzione (ossia considerando g come funzione delle due variabili x, p) si ottiene $dg = x dp + p dx - f'(x) dx$. Procedendo poi con la sostituzione e ricordando che $p = f'(x)$ si osserva che gli ultimi due termini si cancellano, e si ottiene $dg = x(p) dp$. In virtù dell'invarianza del differenziale¹ si conclude dunque che $g'(p) = x(p)$. Da qui

¹ La proprietà di invarianza del differenziale significa che si possono scambiare le operazioni di sostituzione di variabili e di differenziazione, e si perviene comunque allo stesso risultato. Se abbiamo una funzione di due variabili $F(x, y)$, e vi sostituiamo $y = y(x)$ otteniamo una nuova funzione $f(x) = F(x, y(x))$. Supponendo di voler calcolare il differenziale df di quest'ultima funzione possiamo procedere in due modi. Nel primo modo eseguiamo prima la sostit-

si calcola

$$g''(p) = x'(p) = \frac{1}{p'(x)} \Big|_{x=x(p)} = \frac{1}{f''(x)} \Big|_{x=x(p)} > 0 ,$$

in virtù della formula per la derivazione della funzione inversa. Stabilito dunque che $g(p)$ è funzione convessa possiamo procedere alla costruzione della sua trasformata di Legendre definendo $x(p) = g'(p)$, la cui inversa è proprio $p(x) = f'(x)$, e la trasformata è $f(x) = (xp - g(p)) \Big|_{p=p(x)}$.

Esempio 8.1: *La disuguaglianza di Young.* Due funzioni che siano la trasformata di Legendre una dell'altra vengono dette *duali nel senso di Young*. La definizione stessa di trasformata di Legendre implica la *disuguaglianza di Young*: $px \leq f(x) + g(p)$, per ogni valore di p, x per cui le funzioni siano definite. Ad esempio, sia $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ con $\alpha > 1$. Allora la sua trasformata è $g(p) = \frac{p^\beta}{\beta}$, dove $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. La disuguaglianza di Young in questo caso si scrive $px \leq \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta}$ per $x, p > 0$, $\alpha, \beta > 1$ e $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. La disuguaglianza di Young svolge un ruolo significativo nella costruzione degli spazi L^p in Analisi Funzionale.

8.1.2 La trasformata di Legendre in più variabili

L'aspetto che ci interessa particolarmente nella trasformata di Legendre è la connessione tra una trasformazione di variabili e la sua inversa. Formuliamo questa proprietà nella forma in cui ci sarà utile in seguito

Proposizione 8.1: *Sia $f(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ una funzione delle n variabili $(x_1, \dots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$ e di altre variabili $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ che hanno ruolo di parametri, e supponiamo che per tutti i valori di α che ci interessano sia soddisfatta la condizione di non degenerazione*

$$\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right) \neq 0.$$

tuzione, calcolando esplicitamente $f(x)$, e poi differenziamo $f(x)$ scrivendo $df = \frac{df}{dx} dx$. In questo calcolo dobbiamo ricordare che $\frac{df}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx}$, sicché alla fine abbiamo $df = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) dx$. Nel secondo modo procediamo prima a differenziare la funzione di due variabili $F(x, y)$, scrivendo $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$; poi procediamo alla sostituzione di variabili, e qui dobbiamo calcolare il differenziale $dy = \frac{dy}{dx} dx$. Effettuata la sostituzione troviamo ancora $df = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) dx$, che è esattamente l'espressione del differenziale trovata in precedenza. Ne concludiamo che nel calcolo del differenziale di una funzione le operazioni di sostituzione di variabili e di differenziazione possono essere scambiate. Ciò vale anche per funzioni di più variabili. Si noti bene che questa proprietà non si estende ai differenziali di ordine superiore al primo: in quel caso il risultato dipende dall'ordine in cui vengono eseguite le operazioni.

Sia $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ una trasformazione di variabili generata da f tramite le equazioni

$$(8.2) \quad y_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Allora la trasformazione inversa $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, \mathbf{a})$ è generata dalla trasformata di Legendre $g(y_1, \dots, y_n)$ definita come

$$g(y_1, \dots, y_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) = \left(\sum_{j=1}^n x_j y_j - f(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{y}, \mathbf{a})},$$

e si ha

$$(8.3) \quad \begin{aligned} x_j &= \frac{\partial g}{\partial y_j}, \quad j = 1, \dots, n, \\ \frac{\partial g}{\partial \alpha_k} &= -\frac{\partial f}{\partial \alpha_k}, \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Corollario 8.2: La trasformata di Legendre è involutiva: se $g(\mathbf{y}, \mathbf{a})$ è la trasformata di $f(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ allora $f(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ è la trasformata di $g(\mathbf{y}, \mathbf{a})$.

Dimostrazione della proposizione 8.1. L'argomento non è dissimile da quello svolto nel caso di una sola variabile. L'inversa della funzione $\mathbf{y}(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ esiste in virtù della condizione di non degenerazione, quindi la trasformata di Legendre $g(\mathbf{y}, \mathbf{a})$ è ben definita. Si procede a differenziare g prima della sostituzione, e si trova

$$dg = \sum_{j=1}^n \left(x_j dy_j + y_j dx_j - \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \right) - \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} d\alpha_k.$$

Effettuando la sostituzione si cancellano il secondo ed il terzo termine tra parentesi, e si ha

$$dg = \sum_{j=1}^n x_j dy_j - \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} d\alpha_k.$$

Questa espressione deve essere confrontata col differenziale di g calcolato pensando di aver già eseguito la sostituzione, ossia

$$dg = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_j} dy_j + \sum_{k=1}^m \frac{\partial g}{\partial \alpha_k} d\alpha_k.$$

Per confronto si ricavano le espressioni (8.3).

Q.E.D.

La dimostrazione del corollario 8.2 è lasciata al lettore.

8.2 Lo spazio delle fasi e le equazioni di Hamilton

Le equazioni di Hamilton costituiscono la forma più evoluta ed interessante delle equazioni della dinamica. La deduzione delle equazioni consiste essenzialmente nel costruire la trasformata di Legendre della Lagrangiana, usando le velocità generalizzate come variabili. In tal modo si introduce lo *spazio delle fasi*, e si descrive la dinamica generata da una funzione Hamiltoniana.

8.2.1 Lo spazio delle fasi

Come abbiamo discusso nel paragrafo 6.6, il formalismo lagrangiano descrive la dinamica nello *spazio degli stati* descritto dalle coordinate e velocità generalizzate $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$, e le equazioni del moto sono quelle di Lagrange, che riscriviamo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

dove la Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ deve soddisfare la condizione di non degenerazione

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \right) \neq 0.$$

Come abbiamo già avuto modo di osservare (ad esempio nel paragrafo 7.6.2), la forma stessa delle equazioni di Lagrange suggerisce che si possano riscrivere come

$$(8.4) \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Le equazioni appaiono molto simmetriche, ma non sono in forma normale, perché non è esplicitata la derivata \dot{q} . Tuttavia questa forma delle equazioni suggerisce che si possano introdurre come coordinate i *momenti coniugati* p_j al posto delle velocità generalizzate. Si osservi bene che la corrispondenza stretta tra la coordinata q_j e la corrispondente velocità \dot{q}_j viene ereditata dal momento p_j , il che giustifica l'uso dell'aggettivo “coniugati”. Allo spazio descritto dalle coordinate $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ si dà il nome di *spazio delle fasi*, e le coordinate vengono dette *canoniche*.

8.2.2 Le equazioni di Hamilton

Veniamo ora alla scrittura delle equazioni. Per porre in forma normale il sistema delle equazioni (8.4) occorrerebbe invertire le relazioni $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ rispetto alle coordinate \dot{q} , ricavando così un sistema di equazioni in forma normale che possiamo scrivere come

$$\dot{q}_j = \psi_j(q, p), \quad \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

dove le $\psi_j(q, p)$ sono funzioni note, costruite mediante inversione delle definizioni dei momenti. È qui che entra in gioco la trasformata di Legendre: le funzioni inverse sono in realtà le derivate rispetto ai momenti p della trasformata delle Lagrangiana. Vale dunque la

Proposizione 8.3: *Le quazioni di Lagrange (8.4) sono equivalenti al sistema di equazioni di Hamilton*

$$(8.5) \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n$$

dove la funzione Hamiltoniana $H(q, p, t)$ è la trasformata di Legendre della Lagrangiana, ossia

$$(8.6) \quad H(q, p, t) = \left[\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - L(q, \dot{q}, t) \right] \Big|_{\dot{q}=\dot{q}(q, p, t)}.$$

Vale inoltre $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$.

La dimostrazione è una ripetizione, parola per parola, della dimostrazione della proposizione 8.1 sulla trasformata di Legendre, a patto di sostituire rispettivamente le funzioni f e g con L ed H , le variabili x e y con \dot{q} e p , e i parametri α con le variabili q e t . Tuttavia, data la centralità di questo teorema, riformuliamo la dimostrazione in maniera diretta.

Dimostrazione. Differenziando la funzione H prima di aver effettuato la sostituzione di variabili, e quindi pensandola come funzione di q, \dot{q}, t , e poi effettuando la sostituzione abbiamo

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{j=1}^n \left(\dot{q}_j dp_j + p_j \dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\dot{q}_j dp_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto delle cancellazione di termini dovuta alla definizione stessa dei momenti. L'espressione della seconda riga deve essere confrontata con il differenziale dell'Hamiltoniana a sostituzione effettuata, e dunque pensata come funzione delle sole variabili q, p, t , che è

$$dH = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt.$$

Dal confronto dei coefficienti segue l'asserto.

Q.E.D.

Richiamiamo l'attenzione sul fatto che la descrizione della dinamica è cambiata sotto due aspetti.

Anzitutto lo spazio degli stati (ossia delle posizioni e delle velocità) introdotto nell'ambito lagrangiano viene qui sostituito dallo spazio delle fasi

(ossia quello delle coordinate e dei momenti). Il legame tra i due ambienti è costituito dalla trasformata di Legendre.

Il secondo aspetto riguarda le equazioni del movimento. Benché le equazioni siano diverse, identico resta l'obiettivo di descrivere il moto come fenomeno deterministico, retto da equazioni differenziali in forma normale.

Dal punto di vista geometrico il passaggio allo spazio delle fasi si riconduce a sostituire le velocità, che sono vettori dello spazio tangente alla varietà delle configurazioni, con i momenti che sono definiti come differenziali di una funzione scalare (la Lagrangiana), e come tali devono essere interpretati come forme lineari e non come vettori. In analogia con la costruzione del fibrato tangente vista nel capitolo 6 possiamo immaginare che ad ogni punto della varietà M delle configurazioni sia associato uno spazio lineare, e precisamente quello dei funzionali lineari (detti anche *covettori*) sullo spazio tangente a quel punto. Alla struttura geometrica risultante si dà il nome di *spazio cotangente*, e si indica con T^*M . Alla coppia di coordinate q, p così costruite si dà il nome di *coordinate naturali* sullo spazio cotangente. Il fibrato cotangente è a sua volta una varietà differenziabile, e le coordinate naturali ne forniscono un atlante.

8.2.3 L'Hamiltoniana come energia del sistema

L'Hamiltoniana assume un significato particolare nel caso di sistemi naturali con vincoli olonomi, bilateri, perfetti ed indipendenti dal tempo: si mostra infatti che essa coincide con l'energia totale del sistema, $H = T + V$. A questo risultato si perviene facilmente osservando che in questo caso i momenti coniugati alle coordinate possono risciversi come $p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$, e ricordando la forma generale dell'energia cinetica, discussa nel paragrafo 6.3.3. In effetti, nel caso che stiamo considerando abbiamo $T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n g_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k$. Grazie al teorema di Eulero sulle funzioni omogenee² (o anche con un calcolo diretto) abbiamo allora

$$\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T ,$$

e sostituendo nella formula (8.6) che definisce l'Hamiltoniana abbiamo $H = 2T - L = T + V$. Naturalmente nel calcolo esplicito dell'Hamiltoniana non bisogna dimenticare che l'energia cinetica deve essere espressa come funzione dei momenti p , che sostituiscono le velocità generalizzate \dot{q} come variabili indipendenti.

² Ricordiamo che una funzione $f(x_1, \dots, x_n)$ si dice omogenea di grado k se per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ vale $f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, \dots, x_n)$. Il teorema di Eulero afferma che $\sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = k f(x_1, \dots, x_n)$. Nel nostro caso applichiamo il teorema all'energia cinetica, che è una funzione omogenea di secondo grado nelle velocità $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$.

Nel caso di vincoli dipendenti dal tempo la forma generale dell'energia cinetica contiene anche termini lineari in \dot{q} ed indipendenti da \dot{q} , potendosi scrivere, con le notazioni usate nell'enunciato della proposizione 6.8, come $T(q, \dot{q}, t) = T_2 + T_1 + T_0$, dove il pedice indica il grado in \dot{q} . Possiamo ancora applicare il teorema di Eulero a patto di considerare separatamente i termini di diverso grado in \dot{q} , e abbiamo

$$\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T_2 + T_1$$

(il termine T_0 non contribuisce al momento, essendo indipendente da \dot{q}). Per l'Hamiltoniana abbiamo dunque

$$H = 2T_2 + T_1 - (T_2 + T_1 + T_0 + V) = T - T_0 + V .$$

Nel caso di un sistema Lagrangiano generale invece il lettore si renderà immediatamente conto, rivedendo il paragrafo 7.5.2, che l'Hamiltoniana coincide con l'integrale di Jacobi: è la definizione stessa di Hamiltoniana. Si vede dunque che in generale l'Hamiltoniana non coincide necessariamente con l'energia.

8.2.4 Alcuni esempi

Iniziamo con un esempio elementare, che però mette in buona evidenza lo schema di calcolo da seguire in generale

Esempio 8.2: Punto libero. Introducendo un sistema di coordinate cartesiane (x, y, z) lo spazio delle configurazioni si identifica con \mathbb{R}^3 , e la Lagrangiana, che coincide con l'energia cinetica, si scrive

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) ;$$

i momenti coniugati sono $p_x = m\dot{x}$, $p_y = m\dot{y}$, $p_z = m\dot{z}$, e coincidono con le componenti della quantità di moto. Dal momento che il sistema è privo di vincoli, l'Hamiltoniana coincide con l'energia totale, ed è dunque

$$(8.7) \quad H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) .$$

L'aspetto da sottolineare qui è la forma che assume l'energia cinetica quando si faccia uso di coordinate cartesiane.

Esempio 8.3: Punto su una retta. Nel caso di un punto su una retta \mathbb{R} , descritta dalla coordinata cartesiana x , e soggetto ad un potenziale generico $V(x)$ l'Hamiltoniana si scrive

$$(8.8) \quad H = \frac{p^2}{2m} + V(x) ,$$

dove $p = m\dot{x}$ è la quantità di moto. Il calcolo è del tutto simile a quello dell'esempio precedente.

Esempio 8.4: *Il pendolo.* Lo spazio delle configurazioni è una circonferenza. Nell'esempio 6.16 abbiamo ricavato la Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \dot{\vartheta}^2 + \frac{g}{l} \cos \vartheta ,$$

dove l è il raggio della circonferenza e g l'accelerazione di gravità. Il momento coniugato è $p = \dot{\vartheta}$, e l'Hamiltoniana è

$$(8.9) \quad H = \frac{1}{2} p^2 - \frac{g}{l} \cos \vartheta .$$

Esempio 8.5: *Il moto centrale.* Consideriamo un punto che si muova nello spazio in un campo di forze centrali con energia potenziale $V(r)$, dove r è la distanza dall'origine, e facciamo uso delle coordinate sferiche r, ϑ, φ , la cui relazione con le coordinate cartesiane x, y, z è

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi , \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi , \quad z = r \cos \vartheta .$$

La Lagrangiana si scrive

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \right) - V(r) .$$

I momenti coniugati sono $p_r = m\dot{r}$, $p_\vartheta = mr^2\dot{\vartheta}$ e $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} \sin^2 \vartheta$, e l'Hamiltoniana si scrive

$$(8.10) \quad H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + V(r) .$$

Si osservi che grazie all'ortogonalità delle linee coordinate la metrica dell'energia cinetica ha una forma diagonale. Ciò si riflette nel fatto che scrivere l'energia cinetica come funzione dei momenti è semplice: basta portare a denominatore il coefficiente del quadrato di una delle velocità, e sostituire la velocità col momento corrispondente.

Esempio 8.6: *Il problema degli n corpi.* Dette $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ le posizioni degli n corpi e m_1, \dots, m_n le loro masse, la Lagrangiana si scrive

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \dot{\mathbf{x}}_j^2 - V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) ,$$

dove $V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ è l'energia potenziale. I momenti coniugati sono $\mathbf{p}_j = m_j \dot{\mathbf{x}}_j$, $1 \leq j \leq n$ e l'Hamiltoniana si scrive

$$(8.11) \quad H = \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{p}_j^2}{2m_j} + V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) .$$

Esempio 8.7: *L'Hamiltoniana di un sistema naturale.* Per un sistema naturale con Lagrangiana $L = T(q, \dot{q}) - V(q)$ l'Hamiltoniana si scrive

$$(8.12) \quad H = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n (g^{-1})_{j,k} p_j p_k + V(q) ,$$

dove abbiamo denotato con g^{-1} la matrice inversa della metrica, e con $(g^{-1})_{j,k}$ i suoi elementi. In effetti basta calcolare

$$p_j = \sum_{k=1}^n g_{jk}(q) \dot{q}_k$$

(si veda la nota 27 del capitolo 6). Invertendo si ha

$$\dot{q}_k = \sum_{j=1}^n (g^{-1})_{kj}(q) p_j ,$$

e quindi si riscrive l'energia cinetica come

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n (g^{-1})_{j,k} p_j p_k .$$

A questo punto basta riscrivere l'Hamiltoniana come $H = T + V$.

Esempio 8.8: *Punto in un sistema rotante uniformemente.* Abbiamo già avuto modo di scrivere la Lagrangiana di un punto in un sistema che ruoti uniformemente nel discutere il problema ristretto dei tre corpi. Ricaviamo ora l'Hamiltoniana, considerando il caso spaziale, ed assumendo naturalmente che le forze ammettano potenziale. Dette ξ, η, ζ le coordinate cartesiane del punto in un riferimento cartesiano fisso, x, y, z le coordinate nel sistema rotante, e scegliendo le origini dei due sistemi coincidenti e gli assi z e ζ coincidenti con l'asse di rotazione, abbiamo le relazioni

$$\xi = x \cos \omega t - y \sin \omega t , \quad \eta = x \sin \omega t + y \cos \omega t , \quad \zeta = z ,$$

dove ω è la velocità angolare di rotazione. Con un facile calcolo si ottiene la Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} m \left[(\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2 + \dot{z}^2 \right] - V(x, y, z, t) ,$$

dove $V(x, y, z, t)$ è l'energia potenziale, che naturalmente potrà dipendere dal tempo, dato che ne dipende il sistema di riferimento. I momenti coniugati sono $p_x = m(\dot{x} - \omega y)$, $p_y = m(\dot{y} + \omega x)$, $p_z = m\dot{z}$. Per scrivere l'Hamiltoniana non ci si può più limitare a scrivere l'energia totale, ma bisogna far ricorso alla definizione (8.6), e si ottiene

$$(8.13) \quad H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \omega (p_x y - p_y x) + V(x, y, z, t) .$$

Nel caso del problema ristretto dei tre corpi l'energia potenziale assumerà la forma

$$V(x, y, z, t) = -\frac{Gm(1-\mu)}{r_1} - \frac{Gm\mu}{r_2} ,$$

dove

$$r_1 = \sqrt{(x-\mu)^2 + y^2 + z^2} , \quad r_2 = \sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2} .$$

Qui la scelta delle unità di misura di lunghezza e di massa sono tali che la massa totale dei primari è 1, e la distanza tra i primari è anch'essa 1.

8.2.5 Sistemi hamiltoniani generali

Il formalismo hamiltoniano, o *canonico*, è nato storicamente sulla base del formalismo lagrangiano, ma può formularsi in modo del tutto indipendente da quello. Riassumiamo qui i punti essenziali.

Lo stato di un sistema viene identificato con un punto di una varietà differenziabile di dimensione pari, detta *spazio delle fasi*, che verrà denotata nel seguito con \mathcal{F} . La varietà \mathcal{F} viene dotata di coordinate, che verranno denotate con $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$; le coppie di coordinate (q_j, p_j) , $1 \leq j \leq n$ vengono dette *canonicamente coniugate* ed il numero n è detto *numero di gradi di libertà del sistema*. Una funzione dello stato del sistema, o *variabile dinamica*, deve dunque esprimersi come una funzione $f = f(q, p, t)$, ossia funzione delle coordinate canoniche e del tempo.

La dinamica sullo spazio delle fasi \mathcal{F} è determinata dalla funzione *Hamiltoniana* $H(p, q, t)$, tramite le *equazioni di Hamilton*, o *equazioni canoniche*

$$(8.14) \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

che sono un sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine.

Se H non dipende in modo esplicito dal tempo, il sistema viene detto *autonomo*; in questo caso l'Hamiltoniana è un integrale primo del sistema (lo si verifica facilmente, e comunque si veda più avanti). Se invece H dipende in maniera esplicita dal tempo si parla di sistema *non autonomo*.³

È un fatto notevole che un sistema non autonomo possa sempre ricondursi ad uno autonomo semplicemente estendendo lo spazio delle fasi. Precisamente, alle variabili canoniche $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ si aggiunge una coppia di variabili coniugate (q_0, p_0) e si introduce la nuova Hamiltoniana⁴

$$(8.15) \quad \tilde{H}(p_0, p, q_0, q) = H(q, p, q_0) + p_0,$$

³ L'uso dell'aggettivo "autonomo" può giustificarsi se si pensa ad un sistema isolato, che non ha interazioni con nessun ambiente pensato in qualche modo come esterno. È questo il caso, ad esempio, dei problemi del moto centrale, o dei due, tre o n corpi. Il caso non autonomo si presenta invece quando si pensa ad un sistema non isolato, ma inserito in un ambiente che ne determina la dinamica, senza esserne influenzato. Si pensi ad esempio al problema ristretto dei tre corpi, ove i primari possono essere pensati come l'ambiente esterno in cui si muove il planetoido. Oppure si pensi ad un acceleratore di particelle, ove una particella carica si muove sotto l'azione di campi elettrici e magnetici esterni.

⁴ La formula è da leggersi nel senso che $H(q, p, q_0)$ è proprio la funzione $H(q, p, t)$, ove si deve sostituire q_0 ovunque compaia t .

dove abbiamo isolato le variabili q_0, p_0 e raggruppato q_1, \dots, q_n e p_1, \dots, p_n sotto i simboli q, p . In effetti, i sistemi di equazioni di Hamilton corrispondenti alle due Hamiltoniane sono sostanzialmente equivalenti. Per rendercene conto scriviamo le equazioni di Hamilton nei due casi, specificando esplicitamente gli argomenti di ciascuna funzione. L'Hamiltoniana $H(q, p, t)$ ci darà il sistema di equazioni

$$(8.16) \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}(q, p, t), \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q, p, t).$$

D'altro canto l'Hamiltoniana $\tilde{H}(q_0, q, p_0, p)$ genera il sistema di equazioni (ricordando come è definita \tilde{H})

$$(8.17) \quad \begin{aligned} \dot{q}_0 &= 1, & \dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j}(q, p, q_0), \\ \dot{p}_0 &= -\frac{\partial H}{\partial q_0}, & \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q, p, q_0). \end{aligned}$$

Si vede subito che i due sistemi di equazioni sono del tutto equivalenti ove si pongano come condizioni iniziali $q_0(t_0) = 0$ e $\tilde{H}(t_0) = 0$, ovvero $p_0(t_0) = -H(q(t_0), p(t_0), t_0)$: le soluzioni di uno qualunque dei due sistemi lo sono anche per l'altro.⁵

Tenuto conto di queste osservazioni, in questo capitolo verrà trattata tutta la teoria nel caso di sistema autonomo. Le sole particolarità riguardano le trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo, che possono trattarsi come una sottoclasse di quelle indipendenti dal tempo, e verranno considerate nel paragrafo 8.7.

Esercizio 8.1: Mostrare che le equazioni di Hamilton sono lagrangiane. Precisamente, si considerino q, p come coordinate e \dot{q}, \dot{p} come le corrispondenti velocità generalizzate (sicché si considera un sistema fittizio con un numero di gradi di libertà doppio), e si introduca la Lagrangiana

$$L(q, p, \dot{q}, \dot{p}) = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H(q, p).$$

Si verifichi che le equazioni di Lagrange corrispondenti sono proprio le equazioni di Hamilton per $H(q, p)$.⁶

⁵ Nel sistema (8.17) l'equazione per q_0 si risolve immediatamente, essendo $q_0 = t$. Sostituendo nelle equazioni per q_j, p_j si ricavano le stesse equazioni del sistema (8.16). Supponendo di aver risolto anche queste, e quindi di aver determinato le funzioni $q(t), p(t)$, dalla (8.15) si ricava subito anche $p_0(t) = H(q(t), p(t), t)$.

⁶ Si tratta in realtà di una Lagrangiana degenera, perché essendo lineare nelle velocità generalizzate non soddisfa la condizione di non degenerazione sull'Hessiano. Questo tuttavia non impedisce di scrivere le equazioni di La-

Esercizio 8.2: Mostrare che i punti di equilibrio dei sistemi hamiltoniani sono i punti stazionari dell'Hamiltoniana. Mostrare poi che i punti di massimo o minimo dell'Hamiltoniana sono punti di equilibrio stabile.

8.3 Parentesi di Poisson e variabili dinamiche

Consideriamo l'insieme delle *variabili dinamiche*, ossia l'insieme delle funzioni, che supporremo regolari, definite sullo spazio delle fasi \mathcal{F} , ossia delle funzioni delle coordinate canoniche q, p ed eventualmente del tempo. A tale classe appartengono quelle che in fisica vengono chiamate *osservabili*. Esempi immediati e familiari sono l'energia cinetica o potenziale, il momento angolare, oltre alle coordinate ed ai momenti coniugati stessi.

Ciò che caratterizza in modo profondo e significativo la descrizione hamiltoniana della dinamica è il fatto che l'insieme delle variabili dinamiche possa dotarsi di una struttura algebrica ben precisa, che consente in particolare di descrivere in modo semplice ed elegante l'evoluzione di una qualsiasi quantità. Questo aspetto rappresenta un considerevole passo in avanti rispetto alla descrizione Lagrangiana, nell'ambito della quale la caratterizzazione di una tale struttura sarebbe alquanto complessa, e poco o punto perspicua.

Mette conto osservare che la struttura algebrica, che esporremo nei prossimi paragrafi, ha svolto anche un ruolo determinante nel passaggio alla descrizione quantistica della meccanica. In effetti, tale descrizione si formula assegnando la legge di evoluzione delle osservabili (quantistiche, in contrapposizione alle osservabili classiche) e la loro algebra, ossia il complesso delle operazioni ammesse tra osservabili e le leggi che le governano.

8.3.1 L'algebra delle parentesi di Poisson

Date due funzioni differenziabili $f(q, p)$, $g(q, p)$ sullo spazio delle fasi \mathcal{F} , la parentesi di Poisson $\{f, g\}$ è la funzione su \mathcal{F} definita come

$$(8.18) \quad \{f, g\} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right)$$

Questa espressione si presenta come una operazione sullo spazio delle funzioni su \mathcal{F} ; è dunque interessante almeno elencarne le proprietà. Indicando con f, g, h delle funzioni due volte differenziabili su \mathcal{F} e con α una costante reale si ha:

i. linearità:

$$\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\} \quad , \quad \{\alpha f, g\} = \alpha \{f, g\} \quad ;$$

grange, che risultano essere di fatto del primo ordine, e non del secondo come ci si aspetterebbe dalla teoria sviluppata nel capitolo 6.

ii. proprietà anticommutativa:

$$\{f, g\} = -\{g, f\} ;$$

iii. identità di Jacobi:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 ;$$

iv. proprietà di Leibniz:

$$\{f, gh\} = g \{f, h\} + \{f, g\} h ;$$

v. relazioni con la derivata:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_j} \{f, g\} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_j}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial q_j} \right\} \\ \frac{\partial}{\partial p_j} \{f, g\} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial p_j}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial p_j} \right\} , \quad 1 \leq j \leq n . \end{aligned}$$

L'identità di Jacobi può interpretarsi come una misura del difetto di associatività dell'operazione. La proprietà di Leibniz è di fatto l'estensione alla parentesi di Poisson della analoga regola di Leibniz per la derivazione di un prodotto.

La facile dimostrazione di queste identità è lasciata al lettore. Le prime tre proprietà in particolare conferiscono allo spazio delle funzioni su \mathcal{F} dotato dell'operazione di parentesi di Poisson la struttura di un'algebra di Lie.

8.3.2 Evoluzione di variabili dinamiche

L'interesse della parentesi di Poisson per l'evoluzione delle variabili dinamiche è chiarito dalla seguente

Proposizione 8.4: Sia $f(q, p, t)$ una funzione differenziabile; allora la sua derivata temporale è

$$(8.19) \quad \dot{f} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} .$$

Dimostrazione. Basta calcolare

$$\dot{f} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial f}{\partial t} ,$$

sostituire \dot{q}_j e \dot{p}_j mediante le equazioni di Hamilton (8.5) e far uso della definizione della parentesi di Poisson data dalla (8.18). Q.E.D.

In conseguenza di questa proposizione si può caratterizzare la dinamica Hamiltoniana dicendo che la derivata temporale di una qualunque funzione $f(q, p)$ (non dipendente esplicitamente dal tempo) su \mathcal{F} è determinata dall'equazione⁷

$$(8.20) \quad \dot{f} = \{f, H\} .$$

Esercizio 8.3: Si consideri un sistema naturale con Hamiltoniana $H = T + V$ indipendente dal tempo. Si verifichi che il teorema dell'energia cinetica si può ricavare facendo uso della parentesi di Poisson.

Suggerimento: calcolare $\dot{T} = \{T, H\}$, verificando che risulta $\dot{T} = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k Q_k = \Pi$.

8.3.3 Le equazioni canoniche e le parentesi di Poisson fondamentali

Tra le funzioni definite sullo spazio delle fasi possiamo annoverare le coordinate canoniche stesse. La loro evoluzione è determinata dalle equazioni

$$(8.21) \quad \dot{q}_j = \{q_j, H\} , \quad \dot{p}_j = \{p_j, H\} , \quad 1 \leq j \leq n ,$$

che altro non sono che una riscrittura delle (8.5) in forma più simmetrica. Questa formulazione risulterà utile più avanti al fine di caratterizzare le trasformazioni canoniche.

Richiamiamo fin d'ora l'attenzione sul fatto che le coordinate soddisfano le relazioni

$$(8.22) \quad \{q_j, q_k\} = \{p_j, p_k\} = 0 , \quad \{q_j, p_k\} = \delta_{jk} , \quad j, k = 1, \dots, n ,$$

dove δ_{jk} è il simbolo di Kroneker. A queste relazioni daremo il nome di *parentesi di Poisson fondamentali*.

8.4 Integrali primi

La definizione di integrale primo, o costante del moto, data per i sistemi di equazioni differenziali (definizione 4.1) si applica anche ai sistemi hamiltoniani: *una costante del moto, o integrale primo, è una funzione definita sullo spazio delle fasi il cui valore si mantiene costante lungo le soluzioni delle equazioni di Hamilton*. Abbiamo già visto più volte quanto la conoscenza di integrali primi si riveli preziosa sia ai fini di un'analisi qualitativa del movimento, sia per arrivare, ove possibile, alla scrittura delle soluzioni delle equazioni. La caratterizzazione di integrali primi nell'ambito del formalismo Hamiltoniano si riformula in modo naturale grazie all'operazione di parentesi di Poisson.

⁷ Si veda ad esempio [17].

8.4.1 Ricerca di integrali primi

Ricordiamo ancora che stiamo considerando sistemi autonomi. La caratterizzazione degli integrali primi in ambito hamiltoniano si basa sulla

Proposizione 8.5: *Se $H(q, p)$ è l'Hamiltoniana di un sistema autonomo, e $f(q, p)$ una variabile dinamica (regolare) non dipendente esplicitamente dal tempo, allora f è integrale primo se e solo se vale*

$$(8.23) \quad \{f, H\} = 0.$$

La dimostrazione è ovvia conseguenza della proposizione (8.23), tenuto conto che è $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ perché f è supposta non dipendere esplicitamente dal tempo.

Ciò che è meno ovvio è che l'equazione (8.23) rappresenta di fatto un'equazione alle derivate parziali per la ricerca di integrali primi.⁸

Corollario 8.6: *L'Hamiltoniana $H(q, p)$ di un sistema autonomo è una costante del moto.*

Quest'ultimo corollario costituisce la riformulazione in ambito Hamiltoniano della proposizione 7.5 sull'esistenza dell'integrale primo di Jacobi per un sistema Lagrangiano. L'Hamiltoniana coincide con questo integrale.

Dimostrazione. La parentesi di Poisson è anticommutativa, quindi $\{H, H\} = -\{H, H\} = 0$. Q.E.D.

Corollario 8.7: (Teorema di Poisson) *Se f, g sono costanti del moto per H , anche $h = \{f, g\}$ è una costante del moto.*

Dimostrazione. Per l'identità di Jacobi, $\{\{f, g\}, H\} = \{\{g, H\}, f\} - \{\{f, H\}, g\} = 0$ perché $\{f, H\} = \{g, H\} = 0$. Q.E.D.

Esempio 8.9: *Sistema autonomo ad un grado di libertà.* L'Hamiltoniana $H(q, p)$ è una costante del moto, quindi le orbite sullo spazio delle fasi sono le curve di livello definite come $H(q, p) = E$, dove $E = H(p(0), q(0))$ è una costante determinata dai dati iniziali. Lo spazio delle fasi è bidimensionale, e quindi si applicano tutti i metodi di studio qualitativo discussi nel paragrafo 4.3, con le dovute attenzioni.

Esercizio 8.4: Studiare qualitativamente la dinamica di un sistema sullo spazio delle fasi $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ con coordinate ϑ, p la cui Hamiltoniana è $H(\vartheta, p) = p(1 - p) \sin \vartheta$.

Esempio 8.10: *Punto libero.* L'Hamiltoniana è

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

⁸ Il lettore osserverà immediatamente che ci si deve normalmente attendere che risolvere un'equazione alle derivate parziali sia più difficile che risolvere un sistema di equazioni differenziali ordinarie. Tuttavia l'equazione 8.4 è uno degli strumenti utili per lo sviluppo di metodi di approssimazione successiva, tipici della cosiddetta *Teoria delle perturbazioni*.

(si veda l'esempio 8.2). È immediato verificare che, oltre all'Hamiltoniana stessa, si hanno le costanti del moto

$$p_x, p_y, p_z, M_x = yp_z - zp_y, M_y = zp_x - xp_z, M_z = xp_y - yp_x ;$$

di queste solo 5 sono indipendenti (ad esempio, si può scartare M_z). Il corollario 8.7 consentirebbe, in linea di principio, di trovarne altre (che non potrebbero comunque essere indipendenti da queste). Si può però verificare rapidamente che vale la tabella

$$(8.24) \quad \begin{array}{c|cccccc} \{\cdot, \cdot\} & p_x & p_y & p_z & M_x & M_y & M_z \\ \hline p_x & 0 & 0 & 0 & 0 & p_z & -p_y \\ \hline p_y & 0 & 0 & 0 & -p_z & 0 & p_x \\ \hline p_z & 0 & 0 & 0 & p_y & -p_x & 0 \\ \hline M_x & 0 & p_z & -p_y & 0 & M_z & -M_y \\ \hline M_y & -p_z & 0 & p_x & -M_z & 0 & M_x \\ \hline M_z & p_y & -p_x & 0 & M_y & -M_x & 0 \end{array}$$

Da queste costanti del moto è facile ricavare l'orbita nello spazio delle fasi. In effetti si verifica subito che l'intersezione in \mathbb{R}^6 delle superfici (che in particolare sono tutte iperpiani) $p_x = c_1, p_y = c_2, p_z = c_3, M_x = c_4, M_y = c_5$, dove c_1, \dots, c_5 sono delle costanti, è una retta, e questa è l'orbita.

Esempio 8.11: *Il problema degli n corpi.* L'Hamiltoniana è (si veda l'esempio 8.6)

$$H = \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{p}_j^2}{2m_j} + V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) ;$$

il sistema ammette 7 costanti del moto indipendenti, e precisamente l'energia totale H , le tre componenti della quantità di moto totale $\mathbf{P} = \sum_j \mathbf{p}_j$, e le tre componenti del momento angolare totale $\mathbf{M} = \sum_j \mathbf{x}_j \wedge \mathbf{p}_j$. Anche in questo caso si verifica che il corollario 8.7 non aggiunge nessuna informazione rilevante, perché le costanti del moto $P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z$ si comportano ancora, rispetto alle parentesi di Poisson, come in tabella (8.24). Nel caso $n = 2$ (problema dei due corpi) lo spazio delle fasi è \mathbb{R}^{12} , e la conoscenza di 7 costanti del moto consente di stabilire che il moto si svolge su una superficie a 5 dimensioni; questo non sembra sufficiente, a prima vista, per stabilire l'integrabilità del sistema, in apparente contrasto col fatto che il sistema è effettivamente integrabile. In effetti, in generale l'integrazione di un sistema di equazioni differenziali $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ su \mathbb{R}^{2n} (o su una varietà di dimensione $2n$)

richiede la conoscenza di $2n - 1$ integrali primi. Nel caso Hamiltoniano però basta conoscere n integrali primi indipendenti, purché soddisfino l'ulteriore condizione che la parentesi di Poisson tra due qualunque di essi si annulli. Su questo si tornerà più avanti. Così, ad esempio, per $n = 2$ le costanti del moto H, P_x, P_y, P_z soddisfano le condizioni richieste, e le due mancanti si ottengono dalle tre del momento angolare col procedimento di riduzione al moto centrale. Per $n > 2$ invece le 7 costanti del moto qui trovate sono insufficienti, ed occorrerebbe cercarne altre. Ma i teoremi di Bruns e Poincaré affermano che ciò, in generale, non è possibile.

8.4.2 Variabili cicliche

Supponiamo, come abbiamo già fatto nel caso del formalismo lagrangiano (paragrafo 7.5.1), che l'Hamiltoniana di un sistema non dipenda da una delle coordinate q , ossia che si abbia $\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0$ per un qualche j . Supponiamo per semplicità che sia $j = n$, il che si può sempre ottenere semplicemente riordinando le coppie di variabili tra loro coniugate. Allora l'equazione di Hamilton per il momento p_n coniugato a q_n si scrive $\dot{p}_n = 0$, e dunque p_n è un integrale primo. Fin qui, nulla di realmente nuovo rispetto al formalismo lagrangiano. Ma l'aspetto interessante è che in questo caso il sistema Hamiltoniano si può ridurre ad uno con un grado di libertà in meno, al quale bisogna aggiungere un'equazione che si integra direttamente. Illustriamo il procedimento.

Consideriamo l'Hamiltoniana $H(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_n)$, indipendente da q_n , e scriviamo le equazioni di Hamilton separando quelle per q_n, p_n e specificando gli argomenti:

$$\begin{aligned}\dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j}(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_n) , \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_n) , \quad j = 1, \dots, n-1 ; \\ \dot{q}_n &= \frac{\partial H}{\partial p_n}(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_n) , \\ \dot{p}_n &= 0.\end{aligned}$$

Poiché p_n è un integrale primo, abbiamo $p_n(t) = C$, ovvero il suo valore al tempo iniziale. Se ora sostituiamo questo valore in tutte le altre equazioni possiamo fare tre osservazioni.

- (i) Il sistema delle equazioni per $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_{n-1}$, che chiameremo sistema ridotto, si disaccoppia dall'equazione per \dot{q}_n , perché non dipende da q_n , mentre p_n è stato sostituito da una costante.
- (ii) Una volta risolto — se possibile — il sistema ridotto, il termine di destra dell'equazione per \dot{q}_n diventa una funzione nota del tempo, e viene immediatamente ricondotta alle quadrature.
- (iii) Il sistema ridotto di equazioni è lo stesso che si otterrebbe sostituendo p_n con C nell'Hamiltoniana originale, ossia considerando

l'Hamiltoniana a $n - 1$ gradi di libertà

$$H'(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}) = H(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}, C) .$$

Queste osservazioni mostrano che l'esistenza di una variabile ciclica consente di fatto di ridurre di uno il numero di gradi di libertà del sistema, e di scrivere in modo elementare l'Hamiltoniana del sistema ridotto. Se vi sono più coordinate cicliche si può applicare ripetutamente il procedimento. Il caso particolarmente interessante è quello in cui le coordinate cicliche siano n , pari al numero di gradi di libertà. In tal caso il sistema si può integrare completamente per quadrature. È questo, in effetti, il procedimento sottostante alla teoria dell'integrabilità secondo Liouville, di cui discuteremo più avanti.

Esempio 8.12: *Il moto centrale.* In coordinate cartesiane l'Hamiltoniana si scrive

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(r) ,$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Lo spazio delle fasi è \mathbb{R}^6 , e si conoscono 4 costanti del moto indipendenti, e precisamente l'Hamiltoniana H e le tre componenti del momento angolare $\mathbf{M} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p}$. Ne segue che il moto deve svolgersi su una superficie di dimensione 2. Grazie alla costanza della direzione del momento della quantità di moto possiamo ricondurci a studiare il sistema piano scegliendo un riferimento cartesiano con l'asse z orientato come il vettore momento angolare, sicché $M_x = M_y = 0$. Tuttavia non è immediatamente evidente come si possa utilizzare la costanza del modulo del momento angolare continuando a lavorare in coordinate cartesiane. È più conveniente introdurre le coordinate polari r, ϑ e scrivere l'Hamiltoniana come

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} \right) + V(r) .$$

Si vede subito che ϑ è una variabile ciclica, sicché potremo scrivere $p_\vartheta = \ell$ con una costante ℓ calcolata dai dati iniziali, ed affiancarle l'equazione

$$(8.25) \quad \dot{\vartheta} = \frac{\ell}{mr^2} .$$

Come abbiamo già visto nella discussione completa del moto centrale, e grazie alla nostra scelta dell'orientamento dell'asse z , abbiamo che p_ϑ è il modulo del momento angolare, ossia $p_\vartheta = \|M_z\|$. L'Hamiltoniana ridotta, grazie all'osservazione (ii) fatta sopra, si scrive

$$H = \frac{1}{2m} p_r^2 + V^*(r) , \quad V^*(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r) .$$

Ci siamo quindi ricondotti allo studio del moto radiale. Il resto dello studio prosegue risolvendo l'equazione per r , e dunque ricavando $r(t)$, e sostituendola poi nella (8.25), il che ci consente di determinare $\vartheta(t)$. Questo è quanto è stato già fatto, e non occorre ritornarvi. Possiamo però aggiungere qualche osservazione di carattere geometrico. Nel semipiano r, p_r ,

l'equazione $H(r, p_r) = E$ può dare, al variare di E , delle famiglie di curve chiuse (stati legati) oppure delle famiglie di curve che si estendono all'infinito (stati d'urto). Nel primo caso l'orbita giace su una superficie che è topologicamente simile ad un toro \mathbb{T}^2 (il prodotto della circonferenza descritta da ϑ con la curva chiusa nel semipiano r, p_r); nel secondo caso la superficie è topologicamente simile a un cilindro. In generale non è possibile ottenere un risultato migliore di questo.

Esempio 8.13: *Una particolarità del caso Kepleriano.* Si è già visto che nel caso Kepleriano l'orbita è sempre chiusa, e questo non segue dalla discussione dell'esempio 8.12. Ciò è dovuto al fatto singolare che il caso Kepleriano ammette, oltre alle costanti del moto dell'energia e del momento angolare, l'ulteriore costante del moto (detta *vettore di Runge-Lenz*, ma sarebbe più corretto chiamarla *vettore di Laplace*⁹)

$$(8.26) \quad \mathbf{A} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{M} - \frac{km\mathbf{x}}{r},$$

dove k è la costante che compare nel potenziale Kepleriano, $V = -k/r$. Le componenti di questo vettore non sono tutte indipendenti dalle costanti del moto già discusse; se ne può però ricavare una indipendente dalle precedenti, e farne uso per ottenere l'equazione dell'orbita.¹⁰

8.5 Trasformazioni canoniche

Lo studio delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali può svolgersi anche mediante la ricerca di una trasformazione di coordinate sotto la cui azione il sistema assume una forma particolarmente semplice. Questo è quanto abbiamo già fatto, ad esempio, nel discutere il problema dei due corpi o quello del moto centrale.

Nel caso del formalismo Hamiltoniano una trasformazione di coordinate deve essere – come implicitamente deve essere ogni trasformazione – un diffeomorfismo, ma si deve anche specificare quali siano le coppie di coordinate tra loro coniugate, ossia quali siano le nuove coordinate ed i nuovi momenti. Inoltre è naturale chiedersi sotto quali condizioni si possa operare una trasformazione di coordinate senza uscire dall'ambito del formalismo canonico. La ricerca di queste trasformazioni conduce ad isolare il gruppo delle *trasformazioni canoniche*.

8.5.1 Trasformazioni che mantengono inalterata la forma canonica delle equazioni

Si pone anzitutto il seguente problema: *trovare una classe di trasformazioni*

⁹ In effetti, questa costante del moto era già nota a Laplace. Per una breve nota storica si veda [13].

¹⁰ Si veda [6].

$(q, p) = \mathcal{C}(Q, P)$ invertibili tali che il sistema delle equazioni di Hamilton

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

relativo ad una qualunque Hamiltoniana $H(q, p)$ venga trasformato nel sistema, ancora canonico,

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial K}{\partial Q_j}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

con un'opportuna Hamiltoniana $K(Q, P)$.¹¹

Si osservi che il problema è stato enunciato nell'ambito dei sistemi Hamiltoniani autonomi, tuttavia l'osservazione fatta all'inizio del paragrafo 8.2.5, relativa all'ampliamento dello spazio delle fasi, mostra che in realtà il problema è del tutto generale: basta considerare trasformazioni sullo spazio delle fasi esteso, con coordinate (q_0, q, p_0, p) . Questo conduce a considerare trasformazioni in cui il tempo (q_0 in questo caso) viene trattato al pari delle altre coordinate. La restrizione a trasformazioni dipendenti dal tempo (che non deve essere trasformato) può effettuarsi imponendo che la trasformazione su q_0 sia l'identità, ossia $q_0 = Q_0$. Su questo torneremo più avanti.

Esempio 8.14: *Traslazione.* Data la trasformazione

$$q_j = Q_j + a_j, \quad p_j = P_j + b_j, \quad 1 \leq j \leq n,$$

dove a_j, b_j sono delle costanti, si verifica subito che le equazioni mantengono la forma canonica con la nuova Hamiltoniana

$$K(Q, P) = H(q, p) \Big|_{q=Q+a, p=P+b};$$

qui si è usata l'ovvia notazione $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$.

¹¹ Il lettore che abbia ben assimilato il formalismo lagrangiano potrebbe restare sorpreso dall'enunciazione di questo problema, ben ricordando che le equazioni di Lagrange sono invarianti in forma rispetto a cambiamenti di coordinate. In effetti, sembrerebbe naturale attendersi che le equazioni di Hamilton, essendo equivalenti a quelle di Lagrange, godano della stessa proprietà di invarianza. Dobbiamo però osservare che le sole trasformazioni ammesse in ambito lagrangiano riguardano le coordinate generalizzate q sullo spazio delle configurazioni: le trasformazioni sulle velocità \dot{q} sono conseguenza di quelle sulle coordinate, e dunque non sono arbitrarie. In ambito hamiltoniano invece è consentito l'uso trasformazioni arbitrarie che coinvolgano sia le coordinate q che i momenti p . Abbiamo dunque a che fare con una classe di trasformazioni ben più ampia di quella ammessa in ambito lagrangiano, e l'invarianza delle equazioni non è più assicurata.

Esempio 8.15: *Trasformazioni di scala.* Consideriamo per semplicità un solo grado di libertà. La trasformazione

$$q = \alpha Q, \quad p = \beta P$$

con α e β reali non nulli mantiene inalterata la forma canonica delle equazioni con la nuova Hamiltoniana

$$K(Q, P) = \frac{1}{\alpha\beta} H(q, p) \Big|_{q=\alpha Q, p=\beta P}.$$

Per verificarlo basta considerare la funzione $\bar{K}(Q, P) = H(q, p)|_{q=\alpha Q, p=\beta P}$, per la quale vale

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial Q} = \alpha \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{\partial \bar{K}}{\partial P} = \beta \frac{\partial H}{\partial p};$$

poi si calcola

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{1}{\alpha} \dot{q} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{K}}{\partial P} = \frac{\partial K}{\partial P}, \\ \dot{P} &= -\frac{1}{\beta} \dot{p} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{1}{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{K}}{\partial Q} = -\frac{\partial K}{\partial Q}. \end{aligned}$$

Esempio 8.16: *Scambio di coordinate.* Consideriamo ancora il caso di un solo grado di libertà. La trasformazione

$$q = \alpha P, \quad p = \beta Q$$

con α e β reali non nulli mantiene inalterata la forma canonica delle equazioni con la nuova Hamiltoniana

$$K(Q, P) = -\frac{1}{\alpha\beta} H(q, p) \Big|_{q=\alpha P, p=\beta Q}.$$

La dimostrazione è simile a quella dell'esempio precedente, e viene lasciata al lettore.

8.5.2 Restrizione alle trasformazioni canoniche

Consideriamo ora una classe di trasformazioni che mantenga ancora inalterata la forma canonica delle equazioni, con l'ulteriore condizione che la nuova Hamiltoniana sia la trasformata della vecchia. Più precisamente, consideriamo il problema di caratterizzare le trasformazioni invertibili $(q, p) = \mathcal{C}(Q, P)$ che trasformano ogni sistema Hamiltoniano

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad 1 \leq j \leq n$$

nel sistema Hamiltoniano

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_j}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

con l'ulteriore condizione che si abbia

$$\mathcal{H}(Q, P) = H(q, p) \Big|_{q=q(Q, P), p=p(Q, P)}$$

A questa classe di trasformazioni si dà il nome di *trasformazioni canoniche*.¹² Si tratta evidentemente di una sottoclasse di quella del paragrafo 8.5.2.

Al fine di caratterizzare la classe delle trasformazioni canoniche è utile richiamare l'osservazione, già svolta nel paragrafo 8.3.3, che le equazioni di Hamilton sono semplicemente la particolarizzazione al caso delle coordinate dell'equazione generale $\dot{f} = \{f, H\}$, valida per ogni f . Questo conduce in modo naturale ad esprimere la condizione di canonicità mediante le parentesi di Poisson.

Di fatto, in queste note prenderemo in considerazione quattro diverse condizioni di canonicità, tutte tra loro equivalenti, e precisamente stabiliremo che una trasformazione $(q, p) = \mathcal{C}(Q, P)$ è canonica se e solo se verifica una delle seguenti condizioni:

¹² Nella letteratura non c'è accordo completo sulla definizione di trasformazione canonica. Nel testo di Levi-Civita e Amaldi^[19] vengono dette canoniche le trasformazioni che mantengono la forma Hamiltoniana delle equazioni, senza pretendere che la nuova Hamiltoniana sia la trasformata della vecchia, mentre le trasformazioni caratterizzate qui vengono dette *completamente canoniche*. Questa distinzione è particolarmente rilevante nel considerare trasformazioni dipendenti dal tempo, per le quali non basta trasformare l'Hamiltoniana ma occorre aggiungere un termine (si veda la discussione di questo punto nel paragrafo 8.7), e dunque non sono completamente canoniche nel senso di Levi-Civita e Amaldi. Nello schema seguito in queste note tale distinzione è inessenziale grazie all'introduzione dello spazio delle fasi esteso, come discusso nel paragrafo 8.2.5. Altri autori preferiscono chiamare canoniche tutte le trasformazioni che conservano la forma Hamiltoniana delle equazioni. Tale è, ad esempio, l'atteggiamento di Wintner^[29] e Gantmacher^[12]. Quest'ultimo autore sottolinea anche la distinzione tra le trasformazioni del tipo degli esempi 8.15 e 8.16, per i quali la nuova Hamiltoniana deve essere moltiplicata per un fattore numerico, da quelle che richiedono la sola trasformazione dell'Hamiltoniana, come nell'esempio 8.14, e riserva il nome di *trasformazioni canoniche univalenti* a quelle che qui sono dette semplicemente canoniche. Il vantaggio principale della sua scelta sta nel poter considerare come canoniche anche le trasformazioni degli esempi 8.15 e 8.16, che invece sarebbero escluse secondo la definizione qui adottata, salvo nel caso $\alpha\beta = 1$ (esempio 8.15) o $\alpha\beta = -1$ (esempio 8.16). Rispetto a Gantmacher, la scelta di adottare la definizione qui data è dettata sostanzialmente dalla considerazione che la discussione successiva sulle condizioni di canonicità ne risulta sensibilmente semplificata, mentre la generalità viene comunque conseguita componendo una trasformazione canonica con una trasformazione di scala (non canonica, secondo la definizione qui adottata) del tipo dell'esempio 8.15.

- (i) conserva le parentesi di Poisson fondamentali, come viene discusso nel paragrafo 8.5.3;
- (ii) la matrice Jacobiana della trasformazione è una matrice simplettica, come viene discusso nel paragrafo 8.5.4
- (iii) conserva le parentesi di Lagrange, come viene discusso nel paragrafo 8.5.5;
- (iv) (condizione di Lie) la forma differenziale $\sum_{j=1}^n (p_j dq_j - P_j dQ_j)$ è esatta, ossia è il differenziale dS di una funzione, come discusso nel paragrafo 8.5.6.

Naturalmente, per chiarire il significato di queste condizioni occorre dare le necessarie definizioni. Questo è quanto faremo nei prossimi paragrafi.

8.5.3 Conservazione delle parentesi di Poisson

Sia $f(q, p)$ una funzione e $(q, p) = \mathcal{C}(Q, P)$ una trasformazione di coordinate sullo spazio delle fasi \mathcal{F} ; denotiamo poi con $\mathcal{C}f$ la funzione trasformata di f , ossia $(\mathcal{C}f)(Q, P) = f(q, p)|_{(q, p) = \mathcal{C}(Q, P)}$.

Lemma 8.8: Una trasformazione è canonica se ad ogni coppia di funzioni $f(q, p)$, $g(q, p)$ si può applicare il diagramma commutativo

$$(8.27) \quad \begin{array}{ccc} f, g & \xrightarrow{\mathcal{C}} & \mathcal{C}f, \mathcal{C}g \\ \{\cdot, \cdot\} \downarrow & & \downarrow \{\cdot, \cdot\} \\ \{f, g\}_{q, p} & \xrightarrow{\mathcal{C}} & \mathcal{C}(\{f, g\}_{q, p}) = \{\mathcal{C}f, \mathcal{C}g\}_{Q, P} \end{array}$$

dove i pedici q, p e Q, P specificano rispetto a quali variabili debbano essere eseguite le derivate nel calcolo della parentesi di Poisson.

In parole, si deve ottenere lo stesso risultato sia calcolando la parentesi di Poisson rispetto alle variabili q, p e poi effettuando la sostituzione di variabili che sostituendo le variabili e procedendo poi al calcolo della parentesi di Poisson rispetto alle nuove variabili Q, P . Si noti che, per come è enunciata, la condizione è solo sufficiente.

Dimostrazione. Invertiamo la trasformazione, e consideriamo come funzione una delle nuove coordinate Q, P espressa in funzione delle vecchie q, p , ossia $f(q, p) = Q_j(q, p)$ oppure $f(q, p) = P_j(q, p)$, con $j = 1, \dots, n$. Avremo allora, come per ogni funzione, $\dot{f} = \{f, H\}_{q, p}$, dove i pedici indicano che la parentesi di Poisson va calcolata rispetto alle vecchie coordinate. Ma poiché, per ipotesi, la trasformazione conserva le parentesi di Poisson abbiamo anche $\{f, H\}_{q, p} = \{f, H\}_{Q, P}$, ovvero $\dot{Q}_j = \{Q_j, H\}_{Q, P}$ e $\dot{P}_j = \{P_j, H\}_{Q, P}$, per $j = 1, \dots, n$, che sono proprio le equazioni di Hamilton per le nuove variabili con una nuova Hamiltoniana che è la trasformata della vecchia. *Q.E.D.*

Una condizione del tipo fornito dal lemma 8.8 non è concretamente utilizzabile al fine di verificare la canonicità di una trasformazione. Si può però ottenere una condizione facilmente verificabile se si considerano le parentesi di Poisson fondamentali, introdotte nel paragrafo 8.3.3, formula (8.22).

Proposizione 8.9: *Una trasformazione*

$$q_j = q_j(Q, P), \quad p_j = p_j(Q, P), \quad 1 \leq j \leq n$$

è canonica se e solo se conserva le parentesi di Poisson fondamentali

$$(8.28) \quad \begin{aligned} \{q_j, q_k\}_{Q,P} &= \{p_j, p_k\}_{Q,P} = 0 \\ \{q_j, p_k\}_{Q,P} &= \delta_{jk}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Nella dimostrazione della proposizione 8.9 si fa uso di due lemmi.

Lemma 8.10: *Sia data la funzione composta $f(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$, che dipende da q, p tramite le r funzioni $\varphi_1 = \varphi_1(q, p), \dots, \varphi_r = \varphi_r(q, p)$, e sia $g(q, p)$ una generica funzione su \mathcal{F} . Allora si ha*

$$\{f, g\} = \sum_{l=1}^r \frac{\partial f}{\partial \varphi_l} \{\varphi_l, g\}$$

La dimostrazione è elementare, ed è lasciata al lettore.

Lemma 8.11: *Una trasformazione conserva le parentesi di Poisson, ossia rende commutativo il diagramma (8.27) per ogni f, g , se e solo se conserva le parentesi di Poisson fondamentali.*

Dimostrazione. La necessità è evidente: le coordinate stesse sono funzioni su \mathcal{F} . Per la sufficienza basta applicare opportunamente il lemma 8.10, ponendo $r = 2n$ e $\varphi_1(Q, P) = q_1(Q, P), \dots, \varphi_{2n}(Q, P) = p_n(Q, P)$, e considerando anche g funzione composta di (Q, P) tramite le stesse funzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_{2n}$. Si ottiene subito

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{Q,P} &= \sum_{j,k} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial q_k} \{q_j, q_k\}_{Q,P} + \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_k} \{q_j, p_k\}_{Q,P} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_k} \{p_j, q_k\}_{Q,P} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial p_k} \{p_j, p_k\}_{Q,P} \right), \end{aligned}$$

e, tenuto conto delle parentesi di Poisson fondamentali, si ottiene subito $\{f, g\}_{Q,P} = \{f, g\}_{q,p}$, dove il membro di destra deve riesprimersi come funzione di Q, P ; questa relazione esprime proprio la commutatività del diagramma (8.27). Q.E.D.

Dimostrazione della proposizione 8.9. Se la trasformazione conserva le parentesi di Poisson fondamentali, allora si applica il lemma 8.8, che afferma proprio che la trasformazione è canonica. Proviamo il viceversa, supponendo che la trasformazione sia canonica. Consideriamo l'Hamiltoniana $H(q, p) = q_k$, coincidente con una qualsiasi delle coordinate, sicché le equazioni di Hamilton sono $\dot{q}_j = 0, \dot{p}_j = \delta_{jk}$. Poiché la trasformazione è canonica le equazioni di Hamilton per la nuova Hamiltoniana $\mathcal{H}(Q, P) = q_k(Q, P)$ sono $\dot{Q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_j}, \dot{P}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_j}$. D'altra parte la derivata temporale delle funzioni

$q_1(Q, P), \dots, q_n(Q, P), p_1(Q, P), \dots, p_n(Q, P)$, come quella di qualunque altra funzione, è indipendente dalle coordinate, e dunque deve essere¹³ $\dot{q}_j = \{q_j, \mathcal{H}\}_{Q,P} = 0$, $\dot{p}_j = \{p_j, \mathcal{H}\}_{Q,P} = \delta_{j,k}$. Con un ragionamento analogo, considerando l'Hamiltoniana $H(q, p) = p_k$, ossia uno qualsiasi dei momenti, si mostra che vale $\dot{q}_j = \{q_j, \mathcal{H}\}_{Q,P} = \delta_{j,k}$, $\dot{p}_j = \{p_j, \mathcal{H}\}_{Q,P} = 0$. Concludiamo dunque che la trasformazione conserva le parentesi di Poisson fondamentali. Q.E.D.

Esempio 8.17: *Trasformazioni nel caso di un grado di libertà.* Nel caso $n = 1$ la condizione di canonicità assume la forma particolarmente semplice

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix} = 1 ,$$

ossia la trasformazione deve conservare l'area. Così, ad esempio, la trasformazione

$$(8.29) \quad q = \alpha Q , \quad p = \frac{1}{\alpha} P$$

è canonica perché conserva l'area del rettangolo di lati q, p : se il lato q viene stirato di un fattore α il lato p viene compresso dello stesso fattore. Non è canonica invece la consueta trasformazione a coordinate polari (nel piano delle fasi): è noto che l'elemento di area in coordinate polari r, ϑ è $r dr d\vartheta$, e non $dr d\vartheta$. Si può però costruire una trasformazione canonica se al posto del raggio si introduce una quantità che sia proporzionale all'area del cerchio di raggio r , e precisamente $I = r^2/2$. Infatti si può verificare rapidamente la canonicità della trasformazione

$$(8.30) \quad q = \sqrt{2I} \cos \varphi , \quad p = -\sqrt{2I} \sin \varphi ,$$

ove si assegna a φ il ruolo di coordinata e a I quello di momento coniugato: basta calcolare la parentesi di Poisson

$$\{q, p\} = \{\sqrt{2I} \cos \varphi, -\sqrt{2I} \sin \varphi\} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 .$$

Alle variabili I, φ si dà il nome di *variabili d'azione e angolo*.

Esempio 8.18: *Gli oscillatori armonici.* L'Hamiltoniana di un sistema di n oscillatori armonici si scrive

$$H(q, p) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} (p_j^2 + \omega_j^2 q_j^2) ,$$

¹³ Si ricordi che il fatto di poter scrivere la derivata temporale di una funzione come parentesi di Poisson è conseguenza della forma delle equazioni di Hamilton. Dunque nelle nuove coordinate vale $\dot{q}_j = \{q_j, \mathcal{H}\}_{Q,P}$, $\dot{p}_j = \{p_j, \mathcal{H}\}_{Q,P}$.

con $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$. Si ottiene una forma più simmetrica mediante la trasformazione

$$q_j = \frac{Q_j}{\sqrt{\omega_j}}, \quad p_j = P_j \sqrt{\omega_j}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

che è palesemente canonica. La nuova Hamiltoniana è

$$\mathcal{H}(Q, P) = \sum_j \frac{\omega_j}{2} (P_j^2 + Q_j^2).$$

Una forma ancor più semplice si ottiene eseguendo su ciascuna coppia di variabili la trasformazione a variabili d'azione ed angolo (8.30), ossia

$$Q_j = \sqrt{2I_j} \cos \varphi_j, \quad P_j = -\sqrt{2I_j} \sin \varphi_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Si ha allora l'Hamiltoniana

$$H(I, \varphi) = \sum_j \omega_j I_j,$$

che si integra in modo elementare.

8.5.4 Matrici simplettiche

Nei testi più recenti si enuncia la proprietà di conservazione delle parentesi di Poisson in forma più geometrica. Per questo occorre introdurre almeno la nozione elementare di *geometria simplettica*.¹⁴

Consideriamo lo spazio vettoriale \mathbb{R}^{2n} , e denotiamone le coordinate (in modo un po' bizzarro ma conveniente) con $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$. Consideriamo la matrice

$$(8.31) \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

dove I è la matrice identità, $I = \text{diag}(1, \dots, 1)$. Osserviamo subito che vale $J^2 = -I$, sicché la matrice inversa di J è $J^{-1} = -J$.

Dati ora due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{2n}$ definiamo la forma bilineare

$$(8.32) \quad [\mathbf{x}, \mathbf{x}'] = \mathbf{x} \cdot J \mathbf{x}',$$

dove il punto indica il consueto prodotto scalare euclideo. In componenti scriveremo $\mathbf{x} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{x}' = (q'_1, \dots, q'_n, p'_1, \dots, p'_n)$, e

$$(8.33) \quad [\mathbf{x}, \mathbf{x}'] = \sum_{j=1}^n (q_j p'_j - p_j q'_j).$$

Chiameremo questa forma bilineare il *prodotto scalare simplettico*, o più semplicemente il *prodotto simplettico*. È immediato verificare che la forma

¹⁴ Il termine *simplettico* è stato introdotto da Hermann Weyl nel suo testo *The classical groups*, pubblicato nel 1939.

bilineare così introdotta è antisimmetrica, ossia $[\mathbf{x}, \mathbf{x}'] = -[\mathbf{x}', \mathbf{x}]$ e non degenere, ossia $[\mathbf{x}, \mathbf{w}] = 0$ per ogni \mathbf{x} implica $\mathbf{w} = 0$.

Esempio 8.19: *La forma d'area in \mathbb{R}^2 .* Consideriamo due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, e calcoliamo l'area S orientata del parallelogramma che ha per lati i due vettori. Ricordando la formula del prodotto vettoriale si ricava subito $S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_2 - u_2 v_1$. Questa può scriversi come $S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{J} \mathbf{v}$, dove $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, che è proprio la forma simplettica definita sopra.

Il lettore potrà verificare che nel caso generale di \mathbb{R}^{2n} con coordinate $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ la forma simplettica rappresenta la somma delle aree orientate delle proiezioni del parallelogramma su ciascuno dei piani q_j, p_j .

In generale si dà la

Definizione 8.12: *Uno spazio simplettico è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di una forma bilineare antisimmetrica e non degenere.*

Alla luce di questa definizione lo spazio \mathbb{R}^{2n} con la forma bilineare (8.32) è l'esempio più semplice di spazio simplettico. Una conseguenza immediata della definizione è che la dimensione di uno spazio simplettico deve essere pari (altrimenti cadrebbe necessariamente la non degenerazione). Inoltre vale un notevole teorema secondo il quale ogni spazio simplettico può essere dotato di una base in cui il prodotto simplettico abbia la forma (8.32). Dunque, l'esempio che stiamo considerando è del tutto generale.

Nella geometria simplettica la matrice \mathbf{J} ha un ruolo simile a quello della matrice identità \mathbf{I} nella geometria euclidea. In effetti, il prodotto scalare euclideo è una forma bilineare costruita proprio mediante la matrice identità.¹⁵ Procedendo per analogia, si può introdurre in uno spazio simplettico la nozione di *ortogonalità*: due vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare simplettico è nullo.¹⁶ Useremo qui la notazione $\mathbf{v} \angle \mathbf{w}$ per indicare che \mathbf{v} e \mathbf{w} sono ortogonali per il prodotto simplettico, riservando la notazione $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ all'ortogonalità per il prodotto scalare euclideo.

Il concetto di ortogonalità in senso simplettico differisce sensibilmente rispetto a quello euclideo. Ad esempio, per quanto a prima vista possa ap-

¹⁵ Nel *Programma di Erlangen*, che fu la prolusione con la quale Felix Klein inaugurò l'anno accademico a Erlangen nel 1872, all'età di 23 anni, si definisce la geometria come lo studio delle proprietà di invarianza delle figure geometriche rispetto ad un fissato gruppo di trasformazioni. Nel caso euclideo si tratta delle trasformazioni ortogonali. Klein sottolineò come il punto di vista appena menzionato dia una visione unitaria delle geometrie euclidea, affine e proiettiva. Nel nostro caso il gruppo di trasformazioni che definisce la geometria diventa il gruppo simplettico.

¹⁶ Nei testi inglesi si usa di solito l'aggettivo *skew-orthogonal*, o talvolta anche *left-orthogonal*.

parire sorprendente, ogni vettore è ortogonale simplettico a sé stesso.

Si può anche introdurre il concetto di sottospazi ortogonali: due sottospazi V, W di uno stesso spazio simplettico X sono ortogonali se comunque si prendano $\mathbf{v} \in V$ e $\mathbf{w} \in W$ vale $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = 0$. Non segue però che V e W siano anche linearmente indipendenti: ad esempio, ogni retta è ortogonale a sé stessa. Ad un assegnato sottospazio V dello spazio simplettico X si può far corrispondere il sottospazio V^\perp ortogonale a V , definito come di consueto come l'insieme dei vettori di X ortogonali ad ogni vettore di V . Come nel caso euclideo, valgono ancora la proprietà $\dim V + \dim V^\perp = \dim X$ e $(V^\perp)^\perp = V$. Però i due sottospazi V e V^\perp non sono più complementari, ossia non vale più la proprietà $V \oplus V^\perp = X$. Anzi, si classificano i sottospazi nel modo seguente:

- (i) se $V \subset V^\perp$ si dice che V è un sottospazio *isotropo*;
- (ii) se $V \supset V^\perp$ si dice che V è un sottospazio *coisotropo*, nel qual caso V^\perp è isotropo;
- (iii) se $V = V^\perp$ si dice che V è un sottospazio *lagrangiano*;

In particolare valgono le notevoli proprietà che *la dimensione di un sottospazio isotropo non può superare n , e se un sottospazio isotropo ha dimensione n allora è un sottospazio lagrangiano*.

Infine, un sottospazio di uno spazio simplettico non è necessariamente, a sua volta, uno spazio simplettico (come invece avviene per i sottospazi di uno spazio euclideo).

Omettiamo la dimostrazione delle proprietà qui enunciate, ma suggeriamo un esempio sulla base del quale il lettore potrà acquisire una sia pur minima familiarità con i concetti più elementari della geometria simplettica.

Esempio 8.20: *Ortogonalità in uno spazio simplettico.* Denotiamo con $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n)$ la base canonica di \mathbb{R}^{2n} , e con $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ le coordinate, sicché potremo scrivere

$$\mathbb{R}^{2n} \ni \mathbf{x} = q_1 \mathbf{e}_1 + \dots + q_n \mathbf{e}_n + p_1 \mathbf{d}_1 + \dots + p_n \mathbf{d}_n .$$

Allora si verificano facilmente le seguenti affermazioni.

- (i) Il prodotto simplettico è completamente definito dalle relazioni

$$[\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k] = [\mathbf{d}_j, \mathbf{d}_k] = 0 , \quad [\mathbf{e}_j, \mathbf{d}_k] = \delta_{jk} , \quad j, k = 1, \dots, n .$$

- (ii) Ogni sottinsieme non vuoto dell'insieme di vettori $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ è base di un sottospazio isotropo. Lo stesso accade per ogni sottinsieme non vuoto dell'insieme di vettori $\{\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n\}$.
- (iii) Il sottospazio generato dalla base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ è lagrangiano. Lo stesso vale per la base $\{\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n\}$.
- (iv) Più in generale, data una qualunque partizione dell'insieme degli indici $1, \dots, n$ in due classi disgiunte J, K , il sottospazio generato dalla base

$\{\mathbf{e}_j, \mathbf{d}_k\}_{j \in J, k \in K}$ è lagrangiano.¹⁷

- (v) Dato un qualunque sottinsieme $J \subset \{1, \dots, n\}$ il sottospazio generato dalla base $\{\mathbf{e}_j, \mathbf{d}_j : j \in J\}$ è un sottospazio simplettico di dimensione eguale alla cardinalità di J . In particolare, ogni coppia di vettori $\{\mathbf{e}_j, \mathbf{d}_j\}$, qualunque sia $j \in \{1, \dots, n\}$, è un sottospazio simplettico.

Esercizio 8.5: Calcolare quanti sottospazi lagrangiani distinti si possono generare mediante il procedimento del punto (iv) dell'esempio 8.20 qui sopra. (Risposta: 2^n).

Sia ora M una matrice reale $2n \times 2n$, e denotiamo con M^\top la sua trasposta. Si dice che M è una matrice simplettica se soddisfa la relazione

$$(8.34) \quad MJM^\top = J.$$

La definizione qui data significa che le matrici simplettiche sono quelle che conservano la forma del prodotto scalare simplettico. Il loro ruolo in geometria simplettica è analogo a quello delle matrici ortogonali in geometria euclidea: ricordiamo che le matrici ortogonali conservano la forma del prodotto scalare euclideo.

Proposizione 8.13: Una trasformazione $q_j = q_j(Q, P)$, $p_j = p_j(Q, P)$, $1 \leq j \leq n$ è canonica se e solo se la sua matrice Jacobiana

$$(8.35) \quad M = \frac{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)}{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}$$

è una matrice simplettica.

Dimostrazione. La dimostrazione è più noiosa che difficile: basta verificare che la condizione (8.34), ove scritta in modo esplicito per le componenti di M , altro non è che la (8.28).¹⁸ Infatti lo Jacobiano della trasformazione si scrive

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial Q_n} & \frac{\partial q_1}{\partial P_1} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial P_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_n}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial q_n}{\partial Q_n} & \frac{\partial q_n}{\partial P_1} & \cdots & \frac{\partial q_n}{\partial P_n} \\ \frac{\partial p_1}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial p_1}{\partial Q_n} & \frac{\partial p_1}{\partial P_1} & \cdots & \frac{\partial p_1}{\partial P_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_n}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial p_n}{\partial Q_n} & \frac{\partial p_n}{\partial P_1} & \cdots & \frac{\partial p_n}{\partial P_n} \end{pmatrix}.$$

¹⁷ In altre parole, si può costruire un sottospazio lagrangiano scegliendo in modo arbitrario un vettore da ciascuna coppia $(\mathbf{e}_j, \mathbf{d}_j)$.

¹⁸ Per essere più precisi, la verifica della canonicità mediante le parentesi di Poisson fondamentali richiede un numero di operazioni pari a circa la metà di quelle necessarie per far uso della condizione di simpletticità dello Jacobiano.

Osserviamo ora che ogni elemento della matrice $\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^\top$ è il prodotto scalare simplettico tra due righe della matrice \mathbf{M} , e che questo a sua volta è proprio una delle parentesi di Poisson fondamentali. Dunque abbiamo

$$\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^\top = \begin{pmatrix} \{q_1, q_1\} & \cdots & \{q_1, q_n\} & \{q_1, p_1\} & \cdots & \{q_1, p_n\} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{q_n, q_1\} & \cdots & \{q_n, q_n\} & \{q_n, p_1\} & \cdots & \{q_n, p_n\} \\ \{p_1, q_1\} & \cdots & \{p_1, q_n\} & \{p_1, p_1\} & \cdots & \{p_1, p_n\} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{p_n, q_1\} & \cdots & \{p_n, q_n\} & \{p_n, p_1\} & \cdots & \{p_n, p_n\} \end{pmatrix}.$$

Scrivendo infine l'uguaglianza $\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^\top = \mathbf{J}$ si ritrovano proprio le condizioni (8.28). Q.E.D.

Esercizio 8.6: Sia $n = 1$. Mostrare che \mathbf{M} è simplettica se e solo se vale $\det \mathbf{M} = 1$.

Esercizio 8.7: Mostrare che se \mathbf{M} è una matrice simplettica allora vale $|\det \mathbf{M}| = 1$. Costruire un esempio di matrice $2n \times 2n$, con $n > 1$, che abbia determinante 1 ma non sia simplettica.

Esercizio 8.8: Sia $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$ una matrice simplettica formata dai quattro blocchi $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ che sono a loro volta matrici $n \times n$. Trovare un'espressione per la sua inversa.

Suggerimento: da $\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^\top = \mathbf{J}$ dedurre $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J} = \mathbf{J}\mathbf{M}^\top$, e dunque $\mathbf{M}^{-1} = -\mathbf{J}\mathbf{M}^\top\mathbf{J}$. Verificare poi che quest'ultima espressione coincide con $\begin{pmatrix} \mathbf{D}^\top & -\mathbf{B}^\top \\ -\mathbf{C}^\top & \mathbf{A}^\top \end{pmatrix}$.

8.5.5 Conservazione delle parentesi di Lagrange

Supponiamo di aver assegnato le coordinate canoniche q, p come funzioni di due variabili u, v (ed eventualmente di altre variabili, che nella definizione che segue hanno il semplice ruolo di parametri).

Definizione 8.14: La parentesi di Lagrange $[u, v]$ è la funzione di u, v definita come

$$(8.36) \quad [u, v] = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial q_j}{\partial u} \frac{\partial p_j}{\partial v} - \frac{\partial q_j}{\partial v} \frac{\partial p_j}{\partial u} \right).$$

Consideriamo la trasformazione identica: $q_j = Q_j$, $p_j = P_j$, $1 \leq j \leq n$. Facendo assumere volta per volta il ruolo di u, v ad una coppia delle nuove coordinate Q, P (che in realtà coincidono con le vecchie) possiamo scrivere le parentesi di Lagrange fondamentali

$$(8.37) \quad [Q_j, Q_k] = [P_j, P_k] = 0, \quad [Q_j, P_k] = \delta_{jk}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Proposizione 8.15: Una trasformazione $q = q(Q, P)$, $p = p(Q, P)$ è canonica se e solo se conserva le parentesi di Lagrange fondamentali.

In altre parole, per verificare la canonicità di una trasformazione si può procedere a calcolare le parentesi di Lagrange tra tutte le coppie di coordinate Q, P derivando le funzioni $q(Q, P), p(Q, P)$, e verificando che il risultato sia proprio quello delle (8.37).

La dimostrazione si basa sul fatto che tra le parentesi di Poisson e quelle di Lagrange esiste una connessione molto stretta. Per metterla in evidenza consideriamo una generica trasformazione di coordinate

$$q_j = q_j(u_1, \dots, u_{2n}), \quad p_j = p_j(u_1, \dots, u_{2n}), \quad 1 \leq j \leq n,$$

dove u_1, \dots, u_{2n} non sono necessariamente coordinate canoniche. Come per ogni trasformazione, supponiamo che questa sia un diffeomorfismo, sicché possiamo scrivere anche le funzioni inverse $u_1(q, p), \dots, u_{2n}(q, p)$ della trasformazione. Osserviamo che facendo uso delle funzioni $q(u), p(u)$ possiamo calcolare le parentesi di Lagrange $[u_j, u_k]$, mentre facendo uso delle funzioni inverse $u(q, p)$ possiamo calcolare le parentesi di Poisson $\{u_j, u_k\}$.

La proprietà notevole è che la matrice delle parentesi di Poisson delle funzioni u e la trasposta della matrice delle parentesi di Lagrange delle stesse funzioni sono l'inversa l'una dell'altra.

Proposizione 8.16: Siano A e B le matrici $2n \times 2n$ i cui elementi sono, rispettivamente, $A_{jk} = \{u_j, u_k\}$ e $B_{jk} = [u_j, u_k]$, $1 \leq j \leq 2n$, $1 \leq k \leq 2n$. Allora vale la relazione

$$(8.38) \quad AB^\top = I,$$

dove I è la matrice identità $2n \times 2n$.

Dimostrazione. La dimostrazione richiede un calcolo simile a quello svolto per dimostrare la proposizione 8.13. Denotiamo con

$$(8.39) \quad M = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial q_n} & \frac{\partial u_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_{2n}}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial u_{2n}}{\partial q_n} & \frac{\partial u_{2n}}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial u_{2n}}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

lo Jacobiano della trasformazione, e ricordiamo che per un noto teorema di analisi l'inverso di M è lo Jacobiano della trasformazione inversa, ossia

$$(8.40) \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial u_{2n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial q_n}{\partial u_{2n}} \\ \frac{\partial p_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial p_1}{\partial u_{2n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial p_n}{\partial u_{2n}} \end{pmatrix}$$

Verifichiamo subito che vale $\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^\top = \mathbf{A}$, la matrice i cui elementi sono le parentesi di Poisson $\{u_j, u_k\}$. Infatti l'elemento di posto j, k nella matrice $\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^\top$ è il prodotto simplettico tra la riga j -esima e la riga k -esima della matrice \mathbf{M} , che è proprio la parentesi di Poisson $\{u_j, u_k\}$. Calcoliamo ora, osservando che $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}$, e dunque $\mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}$,

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^\top)^{-1} = -(\mathbf{M}^\top)^{-1}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}.$$

Da qui, ricordando anche che $\mathbf{J}^\top = -\mathbf{J}$, ricaviamo

$$(\mathbf{A}^{-1})^\top = (\mathbf{M}^{-1})^\top \mathbf{J} \mathbf{M}^{-1}.$$

Mostriamo ora che quest'ultima matrice coincide con \mathbf{B} , la matrice i cui elementi sono le parentesi di Lagrange. Infatti, l'elemento di posto j, k della matrice è il prodotto simplettico della j -esima colonna con la k -esima colonna della matrice \mathbf{M}^{-1} data dalla (8.40), che è proprio la parentesi di Lagrange $[u_j, u_k]$. Concludiamo dunque che $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^\top$. *Q.E.D.*

Dimostrazione della proposizione 8.15. Segue facilmente dalla proposizione 8.16, identificando (u_1, \dots, u_{2n}) con $(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)$. Dire che la trasformazione conserva la parentesi di Poisson fondamentali significa dire che la matrice \mathbf{A} coincide con la matrice simplettica \mathbf{J} , come stabilito dalla proposizione 8.16. Viceversa, dire che la trasformazione conserva le parentesi di Lagrange fondamentali significa dire che la matrice \mathbf{B} coincide con \mathbf{J} , come si verifica facilmente. Dunque, per ipotesi, una almeno delle due matrici \mathbf{A} e \mathbf{B} coincide con \mathbf{J} . Poiché però vale anche $\mathbf{J}\mathbf{J}^\top = \mathbf{I}$, dalla (8.38) segue necessariamente $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{J}$. *Q.E.D.*

Esercizio 8.9: Come visto nell'esercizio 8.6, le equazioni di Hamilton possono scriversi in forma lagrangiana, pur di considerare la Lagrangiana degenera $L(q, p, \dot{q}, \dot{p}) = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H(q, p)$. Come tali esse sono invarianti in forma per trasformazioni regolari ed invertibili delle variabili q, p , ossia

$$q_j = q_j(Q, P), \quad p_j = p_j(Q, P), \quad j = 1, \dots, n,$$

con inverse

$$Q_j = Q_j(q, p), \quad P_j = P_j(q, p).$$

Scrivere le equazioni di Lagrange corrispondenti alla Lagrangiana trasformata $\tilde{L}(Q, P, \dot{Q}, \dot{P})$ e mostrare che esse assumono la forma (con la notazione di matrici a blocchi)

$$\begin{pmatrix} [Q, Q] & [Q, P] \\ [P, Q] & [P, P] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \dot{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{H}_Q \\ \tilde{H}_P \end{pmatrix},$$

dove $\tilde{H}(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P))$ è l'Hamiltoniana trasformata, e i pedici indicano le derivate. Nelle notazioni usate nel testo quest'ultima formula si scrive

$$\sum_{k=1}^n [u_j, u_k] \dot{u}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial u_j}.$$

Questo esercizio mostra come le parentesi di Lagrange emergano in modo naturale nella trasformazione di sistemi canonici.

8.5.6 Condizione di Lie

Come ultima condizione di canonicità mostriamo che deve essere soddisfatta la condizione di Lie. Benché questa condizione non appaia particolarmente comoda al fine di verificare la canonicità di una trasformazione, risulterà molto utile per la discussione delle funzioni generatrici, che verrà svolta più avanti, nel paragrafo 8.6. Inoltre essa introduce un oggetto nuovo, che risulterà significativo nello sviluppo formale della Meccanica Analitica, e precisamente la forma differenziale $\sum_j p_j dq_j$.

Premettiamo alcune considerazioni volte a mettere in evidenza come la condizione di Lie appaia in qualche modo naturale. A tal fine consideriamo la forma differenziale, detta *1-forma di Liouville*,

$$(8.41) \quad \alpha_L = \sum_{j=1}^n p_j dq_j .$$

Essa rappresenta, in un certo senso, il “lavoro dei momenti”. Vedremo nel seguito di questo capitolo e nel successivo capitolo sul calcolo delle variazioni come questa forma svolga un ruolo centrale nella descrizione matematica della Meccanica Analitica e di molti suoi risultati significativi. Val la pena di osservare che si tratta di una forma differenziale definita sullo spazio delle fasi T^*M , e non sulla varietà delle configurazioni M : i coefficienti dipendono dai momenti p .

L’aspetto che qui ci limitiamo a discutere è che la forma di Liouville è un oggetto che ha una proprietà geometrica ben definita, nel senso che mantiene invariata la sua espressione per trasformazioni di coordinate sullo spazio delle configurazioni, o *trasformazioni puntuali*.¹⁹ Sottolineiamo il fatto che qui ci restringiamo a considerare una classe trasformazioni che sono tutte quelle ammesse nell’ambito lagrangiano, ma rappresentano solo una classe molto ristretta di quelle consentite nel contesto hamiltoniano. Ricordiamo d’altra parte che la definizione originaria delle coordinate sullo spazio delle fasi prende le mosse proprio dall’estensione al fibrato cotangente T^*M delle coordinate sulla varietà delle configurazioni M , realizzata tramite la trasformazione di Legendre: sono quelle che abbiamo chiamato *coordinate naturali* sul fibrato cotangente.

Vogliamo dimostrare che *la 1-forma di Liouville resta invariata per trasformazioni di coordinate sullo spazio delle configurazioni, tenuto conto dell’estensione ai momenti*. In altre parole, consideriamo due carte locali su M , che denotiamo rispettivamente con U, q e con U', Q , e supponiamo assegnata una Lagrangiana $L(q, \dot{q})$ e la corrispondente trasformata $\tilde{L}(Q, \dot{Q})$.

¹⁹ L’aggettivo *puntuale* sta per *trasformazione di punto*, ossia una trasformazione che identifica un punto dello spazio delle configurazioni con coordinate diverse.

Vediamo allora che tra i vecchi momenti p ed i nuovi P sussiste la relazione

$$(8.42) \quad P_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} p_j .$$

Infatti basta calcolare

$$P_k = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} p_j ,$$

dove abbiamo fatto uso dell'identità $\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_k} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_k}$ e della definizione $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$. Se ora consideriamo lo spazio delle fasi T^*M descritto localmente con le coordinate Q della seconda carta e con i rispettivi momenti P , e la forma differenziale $\alpha'_L = \sum_{k=1}^n P_k dQ_k$, e ne scriviamo la trasformata nelle coordinate q e nei rispettivi momenti p abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_k dQ_k &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} p_l \sum_{j=1}^n \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} dq_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} \right) p_l dq_j = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \delta_{lj} p_l dq_j = \sum_{j=1}^n p_j dq_j = \alpha_L . \end{aligned}$$

Possiamo dunque considerare la 1-forma di Liouville come un oggetto geometrico, definito in modo indipendente dalle coordinate della carta scelta per rappresentare (localmente) la varietà M , e quindi indipendentemente dalle coordinate naturali sul fibrato cotangente T^*M .

La condizione di Lie deriva dal considerare trasformazioni che non siano puntuali, ovvero che coinvolgano sia le coordinate che i momenti (e quindi non accettabili in ambito puramente lagrangiano). In tal caso si perviene alla conclusione che se le coordinate sono canoniche allora le 1-forme di Liouville scritte in due sistemi di coordinate diversi possono differire per un differenziale esatto.

Proposizione 8.17: *La trasformazione $(q, p) = \mathcal{C}(Q, P)$ è canonica se e solo se esiste una funzione S tale che vale*

$$(8.43) \quad \sum_{j=1}^n (P_j dQ_j - p_j dq_j) = dS$$

In altre parole, la forma differenziale $\sum_{j=1}^n (P_j dQ_j - p_j dq_j)$ deve essere esatta.²⁰

²⁰ La domanda che sorge spontanea è quali variabili tra q, p, Q, P debbano considerarsi come indipendenti in questa forma differenziale. Se si ricorda la proprietà di invarianza formale del differenziale di una funzione (si veda la nota 1 di questo capitolo) si capisce che c'è una grande libertà di scelta.

Dimostrazione. Consideriamo q, p come variabili indipendenti in un dominio (locale) semplicemente connesso, e diamo una forma più esplicita al membro di sinistra, osservando che vale

$$dQ_j = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} dp_k \right) .$$

Otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (P_j dQ_j - p_j dq_j) &= \sum_{j=1}^n \left[P_j \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} dp_k \right) - p_j dq_j \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\sum_{j=1}^l \left(P_j \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} - \delta_{jk} p_k \right) dq_k + \sum_{j=1}^n P_j \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} dp_k \right] . \end{aligned}$$

Denotiamo rispettivamente con A_k e B_k i coefficienti dei differenziali dq_k e dp_k , ossia

$$A_k = \sum_{j=1}^l \left(P_j \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} - \delta_{jk} p_k \right) , \quad B_k = \sum_{j=1}^n P_j \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} .$$

Perché valga localmente la (8.43) occorre e basta che siano verificate le eguaglianze

$$\frac{\partial A_k}{\partial q_l} - \frac{\partial A_l}{\partial q_k} = 0 , \quad \frac{\partial A_k}{\partial p_l} - \frac{\partial B_l}{\partial q_k} = 0 , \quad \frac{\partial B_k}{\partial p_l} - \frac{\partial B_l}{\partial p_k} = 0 .$$

Queste sono con le condizioni di chiusura della forma (8.43). Mostriamo ora che queste condizioni coincidono con la conservazione delle parentesi di Lagrange, e precisamente che vale

$$\begin{aligned} (8.44) \quad & \frac{\partial A_k}{\partial q_l} - \frac{\partial A_l}{\partial q_k} = [q_l, q_k] , \\ & \frac{\partial A_k}{\partial p_l} - \frac{\partial B_l}{\partial q_k} = [q_l, p_k] - \delta_{kl} , \\ & \frac{\partial B_k}{\partial p_l} - \frac{\partial B_l}{\partial p_k} = [p_l, p_k] . \end{aligned}$$

Per verificare la prima eguaglianza calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_k}{\partial q_l} - \frac{\partial A_l}{\partial q_k} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial P_j}{\partial q_l} \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} + P_j \frac{\partial^2 Q_j}{\partial q_l \partial q_k} - \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \frac{\partial Q_j}{\partial q_l} - P_j \frac{\partial^2 Q_j}{\partial q_l \partial q_k} \right) \\ &= [q_k, q_l] , \end{aligned}$$

Qui, ai fini della dimostrazione, considereremo come variabili indipendenti q, p , e quindi supporremo di aver calcolato l'inversa della trasformazione, $(Q, P) = \mathcal{C}^{-1}(q, p)$.

in virtù del fatto che i termini con le derivate seconde si cancellano, e i termini rimanenti sono proprio l'espressione della parentesi di Lagrange. Veniamo alla seconda eguaglianza, e calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_k}{\partial p_l} - \frac{\partial B_l}{\partial q_k} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial P_j}{\partial p_l} \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} + P_j \frac{\partial^2 Q_j}{\partial q_k \partial p_l} - \delta_{jk} \delta_{kl} - \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \frac{\partial Q_j}{\partial p_l} - P_j \frac{\partial^2 Q_j}{\partial q_k \partial p_l} \right) \\ &= [q_k, p_l] - \delta_{kl} . \end{aligned}$$

La verifica della terza eguaglianza è simile a quella della prima:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_k}{\partial p_l} - \frac{\partial B_l}{\partial p_k} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial P_j}{\partial p_l} \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} + P_j \frac{\partial^2 Q_j}{\partial p_l \partial p_k} - \frac{\partial P_j}{\partial p_k} \frac{\partial Q_j}{\partial p_l} - P_j \frac{\partial^2 Q_j}{\partial p_l \partial p_k} \right) \\ &= [p_k, p_l] . \end{aligned}$$

Dunque, la condizione necessaria e sufficiente perché a forma differenziale $\sum_{j=1}^n (P_j dQ_j - p_j dp_j)$ sia localmente esatta è che sia

$$[q_k, q_l] = 0 , \quad [q_k, p_l] - \delta_{kl} = 0 , \quad [p_k, p_l] = 0 ,$$

ovvero la conservazione delle parentesi di Lagrange.

Q.E.D.

8.5.7 Il flusso Hamiltoniano come trasformazione canonica

Un aspetto notevole della dinamica hamiltoniana è che il flusso generato dalle equazioni canoniche può vedersi come lo svolgersi graduale e continuo di una trasformazione canonica. L'affermazione è da interpretarsi nel modo seguente. Sia $(q, p) \in \mathcal{F}$ un qualunque punto dello spazio delle fasi \mathcal{F} ove i secondi membri delle equazioni di Hamilton siano definiti. Il teorema locale di esistenza ed unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali assicura che per t in un intorno dello zero è ben definito il flusso $(q, p) \rightarrow (q_t, p_t) = \phi^t(q, p)$, che trasporta il punto (q, p) al tempo 0 nel suo evoluto (q_t, p_t) al tempo t . Ora, possiamo vedere il flusso come una trasformazione di coordinate: per t fissato, (q_t, p_t) vengono assegnati come funzione di (q, p) .

Proposizione 8.18: *Sia dato un sistema canonico di equazioni con Hamiltoniana $H(q, p)$, e sia $(q(t), p(t)) = \phi^t(q, p)$ il flusso corrispondente sullo spazio delle fasi. Allora per ogni t il flusso definisce una trasformazione canonica.*

Dimostrazione. Applichiamo la proposizione 8.9, mostrando che per ogni t per cui il flusso è definito vale $\{q_{t,j}, q_{t,k}\} = \{p_{t,j}, p_{t,k}\} = 0$ e $\{q_{t,j}, p_{t,k}\} = \delta_{jk}$. Per $t = 0$ l'affermazione è banalmente vera, perchè il flusso al tempo 0 è l'identità. Mostriamo ora che per qualunque t per cui il flusso è definito vale

$$(8.45) \quad \frac{d}{dt} \{q_{t,j}, q_{t,k}\} = 0 , \quad \frac{d}{dt} \{p_{t,j}, p_{t,k}\} = 0 , \quad \frac{d}{dt} \{q_{t,j}, p_{t,k}\} = 0 .$$

A tal fine consideriamo un intervallo di tempo infinitesimo τ e calcoliamo (prendendo (q, p) come dato iniziale)

$$\begin{aligned} q_{\tau,j} &= q_j + \tau \frac{\partial H}{\partial p_j}(q, p) + o(\tau) , \\ p_{\tau,j} &= p_j - \tau \frac{\partial H}{\partial q_j}(q, p) + o(\tau) . \end{aligned}$$

Da qui ricaviamo

$$\begin{aligned} \{q_{\tau,j}, q_{\tau,k}\} - \{q_j, q_k\} &= \tau \left(\left\{ q_j, \frac{\partial H}{\partial p_k} \right\} + \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_j}, q_k \right\} \right) + o(\tau) , \\ \{p_{\tau,j}, p_{\tau,k}\} - \{p_j, p_k\} &= -\tau \left(\left\{ p_j, \frac{\partial H}{\partial q_k} \right\} - \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_j}, p_k \right\} \right) + o(\tau) , \\ \{q_{\tau,j}, p_{\tau,k}\} - \{q_j, p_k\} &= -\tau \left(\left\{ q_j, \frac{\partial H}{\partial q_k} \right\} + \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_j}, p_k \right\} \right) + o(\tau) , \end{aligned}$$

dove i secondi membri devono essere valutati nel punto iniziale q, p . Dividendo ambo i membri per τ e facendo il limite $\tau \rightarrow 0$ calcoliamo infine

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{q_j, q_k\} &= \left\{ q_j, \frac{\partial H}{\partial p_k} \right\} + \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_j}, q_k \right\} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_k} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_j} = 0 , \\ \frac{d}{dt} \{p_j, p_k\} &= -\left\{ p_j, \frac{\partial H}{\partial q_k} \right\} - \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_j}, p_k \right\} = -\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_k} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial q_j} = 0 , \\ \frac{d}{dt} \{q_j, p_k\} &= -\left\{ q_j, \frac{\partial H}{\partial q_k} \right\} + \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_j}, p_k \right\} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_k} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_j} = 0 . \end{aligned}$$

Se ora consideriamo un'orbita (q_t, p_t) che sia soluzione delle equazioni canoniche per l'Hamiltoniana $H(q, p)$ abbiamo che le relazioni (8.45) sono soddisfatte per ogni punto dello spazio delle fasi, e dunque per ogni punto dell'orbita. Concludiamo che le quantità $\{q_{t,j}, q_{t,k}\}$, $\{p_{t,j}, p_{t,k}\}$ e $\{q_{t,j}, p_{t,k}\}$ restano costanti lungo l'orbita, ed eguali al valore iniziale. *Q.E.D.*

8.5.8 Il teorema di Noether in ambito Hamiltoniano

Abbiamo già visto nel paragrafo 8.5 come venga impostato in ambito Hamiltoniano il problema dell'esistenza di integrali primi. Sappiamo anche, alla luce del paragrafo 7.5.4, che esiste un legame profondo tra integrali primi e simmetrie. Riprendiamo ora questo risultato riformulandolo in ambito Hamiltoniano. Ciò ci condurrà in modo naturale ad una riformulazione più generale del teorema di Noether.

Consideriamo una funzione f definita sullo spazio delle fasi T^*M (visto come il fibrato cotangente ad una varietà). Possiamo ben considerare il campo vettoriale Hamiltoniano definito da f , o, in termini più semplici, possiamo scrivere le equazioni canoniche scegliendo f come Hamiltoniana,

ossia

$$\dot{q}_j = \frac{\partial f}{\partial p_j} , \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial f}{\partial q_j} .$$

In modo più compatto, se consideriamo il differenziale di f , che in termini delle sue componenti denotiamo con $df = \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial q_n}, \frac{\partial f}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial p_n} \right)$, possiamo scrivere il campo Hamiltoniano generato da f come

$$X_f = J df ,$$

dove J è la matrice simplettica definita dalla (8.31).

Il campo vettoriale X_f genera un gruppo ad un parametro di trasformazioni φ_s , dove consideriamo s come il tempo: questo è quanto abbiamo illustrato nell'esempio 7.7. D'altra parte, per quanto abbiamo visto nel paragrafo 8.5.7, il flusso Hamiltoniano è una trasformazione canonica. Quindi possiamo affermare che il campo X_f genera un gruppo ad un parametro di trasformazioni canoniche. Se il flusso è definito per tutti i tempi si dice che il campo è *completo*. Nel seguito del paragrafo considereremo solo questo caso.

In analogia con quanto abbiamo fatto in ambito Lagrangiano, diremo che φ_s è un gruppo di simmetria per il sistema con Hamiltoniana H (definita sullo stesso spazio delle fasi T^*M) se vale

$$H(\varphi_s(q, p)) = H(q, p) \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall (q, p) \in T^*M .$$

In altre parole, l'Hamiltoniana $H(q, p)$ è costante lungo le orbite del campo vettoriale X_f , il che equivale a dire che la funzione H è un integrale primo per l'Hamiltoniana f . Vale allora la

Proposizione 8.19: (*Teorema di Noether*). *Se X_f è un campo vettoriale completo la variabile dinamica f è un integrale primo per il sistema Hamiltoniano su T^*M definito da H se e solo se il gruppo ad un parametro φ_s generato da f è un gruppo di simmetria per H .*

Dimostrazione. Utilizzando il teorema di derivazione delle funzioni composte si calcola

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} H(\varphi_s(q, p)) \Big|_{s=0} = (dH) \cdot \frac{d\varphi_s}{ds} \Big|_{s=0} = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{dq_j}{ds} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{dp_j}{ds} \right) = \{H, f\} . \end{aligned}$$

Q.E.D.

Come si vede, la formulazione e la dimostrazione del teorema di Noether in ambito Hamiltoniano assumono una forma che li rende quasi banali. Dobbiamo però osservare che mentre in ambito lagrangiano la conoscenza del gruppo di simmetria permette di calcolare immediatamente l'integrale primo ad essa associato, ciò non è così diretto in ambito Hamiltoniano. In effetti, consideriamo il generatore infinitesimale della simmetria, $X_f =$

$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi_s(q, p)$, e denotiamone le componenti con $(X_j(q, p), Y_j(q, p))$, e proponiamoci di calcolare l'integrale primo f che genera il campo Hamiltoniano X_f . Deve essere $Jdf = X_f$, e quindi devono essere soddisfatte le equazioni alle derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial q_j} = X_j(q, p) , \quad \frac{\partial f}{\partial p_j} = Y_j(q, p) ,$$

e l'integrale primo f si costruisce risolvendo questo sistema. Il procedimento non è dunque così diretto come risulta essere invece in ambito lagrangiano, dove f è dato da un'espressione esplicita.

8.6 Funzioni generatrici

Nel paragrafo precedente abbiamo enunciato dei criteri di canonicità che ci consentono, assegnata una trasformazione, di stabilire se essa sia o non canonica. Sarebbe però auspicabile sviluppare un metodo che consenta di costruire delle trasformazioni che siano certamente canoniche. Tale scopo si raggiunge grazie all'uso delle *funzioni generatrici*, che discutiamo in questo paragrafo.

8.6.1 Trasformazioni canoniche libere

Riprendiamo la condizione di canonicità di Lie, che riscriviamo

$$\sum_{j=1}^n (P_j dQ_j - p_j dp_j) = dS .$$

La forma stessa di questa relazione suggerisce di considerare q, Q come variabili indipendenti. Più in dettaglio, consideriamo la trasformazione $q = q(Q, P)$, $p = p(Q, P)$, e supponiamo che sia soddisfatta la condizione

$$(8.46) \quad \det \frac{\partial(q_1, \dots, q_n)}{\partial(P_1, \dots, P_n)} \neq 0 .$$

Allora potremo invertire le relazioni $q = q(Q, P)$ rispetto a P , ricavando $P = P(q, Q)$ e sostituire queste funzioni in $p = p(Q, P)|_{P=P(q, Q)}$, sicché la trasformazione assume la forma implicita $p = p(q, Q)$, $P = P(q, Q)$. Le trasformazioni che possono porsi in questa forma vengono dette *trasformazioni canoniche libere*. Esprimendo la funzione S stessa come $S = S(q, Q)$, si ottiene dalla condizione di Lie, identificando i coefficienti dei differenziali dello stesso nome

$$p_j = -\frac{\partial S}{\partial q_j} , \quad P_j = \frac{\partial S}{\partial Q_j} , \quad 1 \leq j \leq n .$$

L'interesse sta nel fatto di poter scegliere in modo largamente arbitrario una funzione $S(q, Q)$: le due relazioni precedenti definiscono una trasformazione

certamente canonica, con la sola condizione che si possano effettuare le inversioni necessarie per dare alla trasformazione una forma esplicita. Vale dunque la

Proposizione 8.20: *Sia data una funzione $S(q, Q)$ soddisfacente la condizione*

$$(8.47) \quad \det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial Q_k} \right) \neq 0 .$$

Allora è definita (in forma implicita) la trasformazione canonica libera

$$(8.48) \quad p_j = -\frac{\partial S}{\partial q_j}(q, Q) , \quad P_j = \frac{\partial S}{\partial Q_j}(q, Q) , \quad 1 \leq j \leq n .$$

La (8.47) garantisce l'invertibilità (almeno locale) della seconda delle (8.48) rispetto a q , sicché si ottiene $q = q(Q, P)$. Per sostituzione nella prima delle (8.48), si ricava poi $p = p(Q, P)$, sicché le vecchie variabili sono assegnate in funzione delle nuove. Viceversa, sempre grazie alla (8.47) si può invertire la prima delle (8.48) rispetto a Q e sostituirla nella seconda; in tal modo si ottengono le nuove variabili in funzione delle vecchie.

La funzione S viene detta *funzione generatrice* della trasformazione canonica.

Esempio 8.21: *Scambio di coordinate.* La funzione generatrice

$$(8.49) \quad S(q, Q) = \sum_j q_j Q_j$$

genera la trasformazione (palesamente canonica)

$$(8.50) \quad p_j = -Q_j , \quad P_j = q_j , \quad 1 \leq j \leq n ,$$

che scambia le coordinate coi momenti coniugati.

La proposizione 8.20 caratterizza le trasformazioni canoniche libere, ma non tutte le trasformazioni canoniche. Infatti, si verifica immediatamente che la trasformazione identità, $q = Q$, $p = P$, non è libera. È d'uso ricorrere ad una forma diversa della funzione generatrice, ottenuta dalla precedente applicando il procedimento della trasformata di Legendre.

8.6.2 Un'altra forma della funzione generatrice

Nella maggior parte delle applicazioni si fa uso di trasformazioni canoniche costruite col metodo fornito dalla seguente

Proposizione 8.21: *Sia data una funzione $S(P, q)$ soddisfacente la condizione*

$$(8.51) \quad \det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial P_j \partial q_k} \right) \neq 0 .$$

Allora è definita (in forma implicita) la trasformazione canonica

$$(8.52) \quad p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}(P, q), \quad Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j}(P, q), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Dimostrazione. La condizione (8.51) garantisce che le (8.52) possono essere invertite (almeno localmente), in modo da esprimere la trasformazione in forma esplicita. Per verificare la canonicità basta introdurre la funzione $\tilde{S} = S - \sum_j P_j Q_j$, e calcolare

$$\begin{aligned} d\tilde{S} &= \sum_j \left(\frac{\partial S}{\partial P_j} dP_j + \frac{\partial S}{\partial q_j} dq_j - P_j dQ_j - Q_j dP_j \right) \\ &= \sum_j (p_j dq_j - P_j dQ_j) \end{aligned}$$

sicché è soddisfatta la condizione di Lie.

Q.E.D.

La funzione S introdotta da quest'ultima proposizione prende ancora il nome di funzione generatrice. Come si vedrà più avanti, questa proposizione non aggiunge nulla di sostanzialmente nuovo alla precedente proposizione 8.20; tuttavia l'uso di una funzione generatrice $S = S(P, q)$ è, di fatto, molto più comune. In effetti, molte trasformazioni interessanti possono esprimersi facilmente in questo modo. Questo è illustrato negli esempi che seguono.

Esempio 8.22: *L'identità e le trasformazioni di scala.* La funzione generatrice

$$S(P, q) = \alpha \sum_j P_j q_j$$

genera la trasformazione

$$p_j = \alpha P_j, \quad Q_j = \alpha q_j, \quad 1 \leq j \leq n,$$

che si pone facilmente in forma esplicita. Per $\alpha = 1$ si ha l'identità.

Esempio 8.23: *Trasformazioni puntuali estese.* Si supponga assegnata una trasformazione di coordinate $Q_j = Q_j(q_1, \dots, q_n)$, soddisfacente la condizione di invertibilità

$$(8.53) \quad \det \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n)} \neq 0$$

La funzione generatrice

$$S(P, q) = \sum_k P_k Q_k(q)$$

completa la trasformazione, essendo

$$p_j = \sum_k P_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_j}(q), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Si osservi che la generatrice soddisfa la condizione (8.51) della proposizione 8.21. Infatti da $Q_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}$ si vede subito che la (8.51) altro non è che la (8.53). Il completamento non è unico. Infatti la funzione

$$S(P, q) = \sum_k P_k Q_k(q) + W(q)$$

con $W(q)$ arbitraria soddisfa ancora la condizione (8.51), e definisce la trasformazione canonica

$$Q_j = Q_j(q) , \quad p_j = \sum_k P_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_j}(q) + \frac{\partial W}{\partial q_j}(q) , \quad 1 \leq j \leq n .$$

Esempio 8.24: *Trasformazioni prossime all'identità.* La funzione

$$(8.54) \quad S(P, q) = \sum_j P_j q_j + \varepsilon F(P, q) ,$$

dove ε è un parametro che tipicamente viene pensato come piccolo, genera una trasformazione canonica

$$(8.55) \quad p_j = P_j + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial q_j}(P, q) , \quad Q_j = q_j + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial P_j}(P, q) , \quad 1 \leq j \leq n$$

che per $\varepsilon = 0$ si riduce all'identità. La condizione di invertibilità (8.51) è palesemente soddisfatta per ε sufficientemente piccolo. Un procedimento tipico della *teoria delle perturbazioni* consiste nell'invertire la trasformazione sviluppando in serie di potenze del parametro ε , assumendo che la funzione F sia analitica in P, q . Il primo passo è elementare: basta invertire la seconda delle equazioni (8.55), ottenendo

$$(8.56) \quad q_j = Q_j - \varepsilon \frac{\partial F}{\partial P_j}(P, q) ;$$

poi in questa e nella seconda delle (8.55) si sostituisce q_j con la sua approssimazione a meno di termini di ordine ε , il che significa semplicemente che si pone $q_j = Q_j$, e si trova

$$\begin{aligned} q_j &= Q_j - \varepsilon \frac{\partial F}{\partial P_j}(P, Q) + \varepsilon^2 \dots \\ p_j &= P_j + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial q_j}(P, Q) + \varepsilon^2 \dots \end{aligned}$$

dove i puntini stanno ad indicare termini che sono almeno quadratici in ε . Tale approssimazione basta quando si intenda determinare l'Hamiltoniana trasformata a meno di termini di ordine ε^2 : tale è lo scopo tipico della cosiddetta *teoria adiabatica*. Se invece si vuole proseguire con lo sviluppo si sostituisce l'espressione per q_j appena trovata nella (8.55) e nella seconda

delle (8.55), e si calcola il termine di ordine ε^2 come

$$\begin{aligned} q_j &= Q_j - \varepsilon \frac{\partial F}{\partial P_j}(P, Q) + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial P_j \partial q_k} \frac{\partial F}{\partial P_k} + \varepsilon^3 \dots \\ p_j &= Q_j + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial P_j}(P, Q) - \varepsilon^2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial q_k} \frac{\partial F}{\partial P_k} + \varepsilon^3 \dots, \end{aligned}$$

dove tutte le funzioni a secondo membro devono essere valutate in Q, P . Il procedimento può essere iterato quante volte si vuole, e, a patto di aver la pazienza di calcolare tutte le derivate necessarie, fornisce lo sviluppo della trasformazione fino all'ordine desiderato in ε . La serie ottenuta risulta essere convergente per valori di ε sufficientemente piccoli.²¹

8.6.3 2^n forme della funzione generatrice

Veniamo ora a discutere brevemente il problema se tutte le trasformazioni canoniche possano essere espresse mediante una opportuna funzione generatrice. Questo argomento viene qui svolto per completezza, ma la lettura di questa parte può essere omessa o posticipata senza pregiudizio per la comprensione dei paragrafi successivi.

Le proposizioni 8.20 e 8.21 non caratterizzano tutte le classi di trasformazioni canoniche possibili. Per convincersene basta il seguente

Esempio 8.25: 2^n trasformazioni canoniche. Sia data una qualunque partizione degli interi $1, \dots, n$ in due classi J, K disgiunte, e si consideri la trasformazione (palesemente canonica)

$$(8.57) \quad \begin{aligned} p_j &= Q_j, & P_j &= -q_j & \text{per } j \in J \\ p_k &= P_k, & Q_k &= q_k & \text{per } k \in K \end{aligned}$$

Di tali trasformazioni ne esistono 2^n distinte, ivi comprese quelle dell'esempio 8.21 (scambio di tutte le coordinate, corrispondente a $J = \{1, \dots, n\}, K = \emptyset$) e dell'esempio 8.22 (identità, corrispondente a $J = \emptyset, K = \{1, \dots, n\}$). Ad eccezione di queste ultime due, nessuna di esse può esprimersi mediante le funzioni generatrici $S(q, Q)$ o $S(P, q)$ delle proposizioni 8.20 e 8.21. Tuttavia ciascuna di queste

²¹ In effetti, molti dei procedimenti tipici della teoria delle perturbazioni si fondano proprio sull'uso di questo genere di sviluppi, che, come ben si può immaginare, non sono sempre agevoli. Nel decennio 1960–1970, grazie ai lavori di Gröbner^[9], Hori^[16] e Deprit^[8], si è iniziato a far uso di una tecnica nota sotto i nomi di *serie di Lie* o *trasformata di Lie*, che consente di effettuare sviluppi di questo genere senza dover ricorrere né all'inversione di funzioni né alla sostituzione di variabili in funzioni note. Questo argomento però esula dagli scopi di queste note, che hanno carattere introduttivo al formalismo hamiltoniano.

trasformazioni può ottenersi se si fa uso della funzione generatrice²²

$$(8.58) \quad S(Q_J, P_K, q) = \sum_{j \in J} Q_j q_j + \sum_{k \in K} P_k q_k$$

con la corrispondente trasformazione

$$(8.59) \quad \begin{aligned} P_j &= -\frac{\partial S}{\partial Q_j} && \text{per } j \in J \\ Q_k &= \frac{\partial S}{\partial P_k} && \text{per } k \in K \\ p_l &= \frac{\partial S}{\partial q_l} && \text{per } 1 \leq l \leq n. \end{aligned}$$

Le trasformazioni di quest'ultimo esempio sono caratterizzate dalla condizione

$$(8.60) \quad \det \left(\frac{\partial(p_1, \dots, p_n)}{\partial(Q_J, P_K)} \right) \neq 0$$

Tale condizione può però verificarsi, almeno localmente, per ogni trasformazione canonica. Vale infatti il seguente

Lemma 8.22: *Data una trasformazione canonica $q = q(Q, P)$, $p = p(Q, P)$ è sempre possibile trovare una partizione degli interi $1, \dots, n$ in due classi disgiunte J, K tali che la (8.60) sia soddisfatta.*

La dimostrazione di questo lemma fa uso delle proprietà degli spazi vettoriali simplettici. Il lettore interessato può riferirsi al testo di Arnold [4], §41 e §48.

Grazie a questo lemma si vede subito che ogni trasformazione canonica può ottenersi (almeno localmente) componendo le trasformazioni generate da tre funzioni generatrici S_1, S_2, S_3 dove S_1 e S_3 sono semplicemente generatrici di uno scambio di coordinate (esempio 8.25), e $S_2 = S_2(P, q)$ è del tipo della proposizione 8.21. Questo può ben vedersi come un'ulteriore giustificazione del fatto di considerare le trasformazioni della proposizione 8.21 come rappresentanti una classe significativa di trasformazioni canoniche.

Un risultato generale è la seguente

Proposizione 8.23: *Data una qualunque partizione degli interi $1, \dots, n$ in due classi J, K disgiunte, sia $S = S(Q_J, P_K, q)$ una funzione soddisfacente la condizione*

$$(8.61) \quad \det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial(Q_J, P_K) \partial q} \right) \neq 0$$

²² Qui e nel resto di questo paragrafo usiamo la notazione Q_J, P_K per indicare l'insieme delle n variabili $\{Q_j, P_k : j \in J, k \in K\}$.

Allora è definita (in forma implicita) una trasformazione canonica

$$(8.62) \quad \begin{aligned} P_j &= -\frac{\partial S}{\partial Q_j} & \text{per } j \in J \\ Q_k &= \frac{\partial S}{\partial P_k} & \text{per } k \in K \\ p_l &= \frac{\partial S}{\partial q_l} & \text{per } 1 \leq l \leq n. \end{aligned}$$

Viceversa, ogni trasformazione canonica può rappresentarsi mediante una funzione generatrice $S(Q_J, P_K, q)$ per un'opportuna partizione J, K .

La dimostrazione si ottiene facilmente seguendo lo schema delle dimostrazioni delle proposizioni 8.20 e 8.21, e facendo uso del lemma 8.22.

In conseguenza di quest'ultima proposizione, si può affermare che tutte le trasformazioni canoniche possono ottenersi mediante una opportuna funzione generatrice della forma descritta nella proposizione 8.23; l'esempio 8.25 mostra che la classe di 2^n funzioni generatrici richiesta dalla proposizione è minimale.

8.7 Trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo

La teoria fin qui esposta riguarda esclusivamente il caso autonomo, ma copre anche il caso non autonomo a condizione di considerare lo spazio delle fasi esteso, come discusso nel paragrafo 8.2.5. Resta tuttavia interessante formulare la teoria per il caso non autonomo senza far ricorso all'estensione dello spazio delle fasi. Ciò è indispensabile anche per confrontare la teoria sviluppata qui con quella discussa nella stragrande maggioranza dei testi.

La novità sostanziale introdotta dalla dipendenza temporale delle trasformazioni di coordinate è che la nuova Hamiltoniana non può più scriversi solo come trasformata delle vecchia: occorre aggiungere un termine ulteriore. Qui dunque si deve far ricorso alla caratterizzazione delle trasformazioni canoniche data nel paragrafo 8.5.1.

Ricordiamo che un sistema non autonomo con Hamiltoniana $H(q, p, t)$ può rendersi autonomo estendendo lo spazio delle fasi con una coppia di variabili coniugate q_0, p_0 , e considerando l'Hamiltoniana

$$(8.63) \quad \tilde{H}(q, p, q_0, p_0) = H(q, p, q_0) + p_0$$

È quindi lecito considerare trasformazioni canoniche sullo spazio delle fasi esteso, ossia trasformazioni della forma²³

$$\begin{aligned} q &= q(Q, P, Q_0, P_0) & , & & p &= p(Q, P, Q_0, P_0) & , \\ q_0 &= q_0(Q, P, Q_0, P_0) & , & & p_0 &= p_0(Q, P, Q_0, P_0) & , \end{aligned}$$

²³ Come già nel paragrafo 8.2.5, qui e nel seguito facciamo uso della notazione $q = (q_1, \dots, q_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, e mettiamo in evidenza le variabili q_0, p_0 , in quanto svolgono un ruolo particolare.

per le quali valgono le condizioni di canonicità fin qui discusse. La classe di trasformazioni così ottenuta è però troppo generale, perché la coordinata q_0 , che svolge il ruolo del tempo, può essere trasformata in modo arbitrario, al pari di tutte le altre.

La scelta più naturale consiste nel restringere la classe di trasformazioni dello spazio delle fasi esteso imponendo che il tempo non venga modificato, e quindi scrivendo $q_0 = Q_0$, mentre $p_0 = p_0(Q, P, Q_0, P_0)$ dovrà soddisfare la condizione di canonicità. In particolare si dovrà avere $\{q_0, p_0\} = \frac{\partial p_0}{\partial P_0} = 1$, sicché sarà necessariamente $p_0 = P_0 + \psi(Q, P, Q_0)$ con un'opportuna funzione $\psi(Q, P, Q_0)$. Questo, naturalmente, avrà delle conseguenze sulla forma dell'Hamiltoniana nelle nuove variabili: nella trasformazione di p_0 compare il termine aggiuntivo $\psi(Q, P, Q_0)$. È anche utile osservare che le condizioni di canonicità $\{q_0, q_j\} = \{q_0, p_j\} = 0$ per $1 \leq j \leq n$ implicano che q_j, p_j siano indipendenti da P_0 . Ciò è naturale, se si pensa che p_0 e P_0 sono coordinate fittizie introdotte al solo scopo di rendere autonomo il sistema, ma ha la conseguenza che le parentesi di Poisson $\{q_j, q_k\}$, $\{q_j, p_k\}$ e $\{p_j, p_k\}$ coinvolgono solo le variabili Q, P , e non Q_0, P_0 .

Queste osservazioni conducono in modo naturale alla seguente

Proposizione 8.24: *Sia $q = q(Q, P, t)$, $p = p(Q, P, t)$ una trasformazione dipendente dal tempo che conserva, per ogni t , le parentesi di Poisson fondamentali. Allora la trasformazione è canonica, ed esiste una funzione $F(q, p, t)$ tale che l'Hamiltoniana trasformata assume la forma*

$$(8.64) \quad \mathcal{H}(Q, P, t) = H(q, p, t) - F(q, p, t) \Big|_{q=q(Q, P, t), p=p(Q, P, t)}$$

Dimostrazione. Basta considerare lo spazio delle fasi esteso, e mostrare che la trasformazione può completarsi nella forma

$$(8.65) \quad \begin{aligned} q &= q(Q, P, Q_0) \ , \quad p = p(Q, P, Q_0) \ , \\ q_0 &= Q_0 \quad \quad \quad , \quad p_0 = P_0 - F(q, p, Q_0) \Big|_{q=q(Q, P, Q_0), p=p(Q, P, Q_0)} \end{aligned}$$

con un'opportuna funzione $F(q, p, Q_0)$; se ciò è vero, la forma (8.64) si ottiene immediatamente dalla (8.63) semplicemente restringendo di nuovo lo spazio delle fasi, ossia eliminando P_0 (che compare solo come termine additivo dell'Hamiltoniana trasformata) e sostituendo il tempo t a Q_0 . Per mostrare che il completamento è possibile, si comincia col derivare rispetto a Q_0 le relazioni $\{q_j, q_k\} = \{p_j, p_k\} = 0$, $\{q_j, p_k\} = \delta_{jk}$ per $1 \leq j \leq n$, e si ottiene

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial q_j}{\partial Q_0}, q_k \right\} + \left\{ q_j, \frac{\partial q_k}{\partial Q_0} \right\} &= 0 \\ \left\{ \frac{\partial q_j}{\partial Q_0}, p_k \right\} + \left\{ q_j, \frac{\partial p_k}{\partial Q_0} \right\} &= 0 \\ \left\{ \frac{\partial p_j}{\partial Q_0}, p_k \right\} + \left\{ p_j, \frac{\partial p_k}{\partial Q_0} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

Ricordando che tutte le funzioni sono indipendenti da P_0 , e che le parentesi di Poisson sono conservate (poiché Q_0 svolge solo il ruolo di un parametro), e denotando $f_j = \frac{\partial q_j}{\partial Q_0}$, $g_j = \frac{\partial p_j}{\partial Q_0}$, si ottiene subito

$$\frac{\partial f_j}{\partial p_k} - \frac{\partial f_k}{\partial p_j} = 0, \quad \frac{\partial f_j}{\partial q_k} - \frac{\partial g_k}{\partial p_j} = 0, \quad \frac{\partial g_j}{\partial q_k} - \frac{\partial g_k}{\partial q_j} = 0.$$

Queste relazioni implicano l'esistenza, almeno localmente, di una funzione $F(q, p, Q_0)$ tale che

$$(8.66) \quad \frac{\partial q_j}{\partial Q_0} = \frac{\partial F}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial p_j}{\partial Q_0} = -\frac{\partial F}{\partial q_j}.$$

Con questa funzione F si completa la trasformazione canonica come nelle (8.65); la canonicità della trasformazione completa si verifica osservando che si ha banalmente $\{q_0, q_j\} = \{q_0, p_j\} = 0$, $\{q_0, p_0\} = 1$; e calcolando

$$\{p_0, q_j\} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_0} - \{F, q_j\}, \quad \{p_0, p_j\} = \frac{\partial p_j}{\partial Q_0} - \{F, p_j\};$$

queste due ultime espressioni, tenuto conto dell'invarianza delle parentesi di Poisson rispetto alle sole variabili q, p, Q, P , si annullano in virtù della (8.66). Q.E.D.

La proposizione precedente fa riferimento alla condizione di canonicità espressa mediante le parentesi di Poisson (proposizione 8.9). Per quanto riguarda la funzione generatrice, basti considerare il caso di una funzione $S(P, q, t)$. Si ha la seguente

Proposizione 8.25: *Sia $S(P, q, t)$ una funzione soddisfacente per ogni t la condizione*

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial P_j \partial q_k} \right) \neq 0;$$

allora la trasformazione

$$(8.67) \quad Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j}, \quad p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \quad 1 \leq j \leq n$$

è canonica, e l'Hamiltoniana trasformata assume la forma

$$(8.68) \quad \mathcal{H}(Q, P, t) = H(q, p, t) \Big|_{q=q(Q, P, t), p=p(Q, P, t)} + \frac{\partial S}{\partial t}(P, q, t) \Big|_{q=q(Q, P, t)}$$

Dimostrazione. Consideriamo ancora l'Hamiltoniana (8.63) sullo spazio delle fasi esteso; la funzione generatrice

$$\tilde{S}(P, q, P_0, q_0) = P_0 q_0 + S(P, q, q_0)$$

soddisfa la condizione della proposizione 8.21, e completa la (8.67) con

$$Q_0 = q_0, \quad p_0 = P_0 + \frac{\partial S}{\partial q_0}.$$

L'asserto segue dalla forma (8.63) dell'Hamiltoniana, restringendo nuovamente lo spazio delle fasi. Q.E.D.

8.8 L'equazione di Hamilton-Jacobi

Per l'integrazione di un sistema canonico, in generale non autonomo,²⁴ si può ricercare una trasformazione canonica dipendente dal tempo che ponga l'Hamiltoniana in una forma particolarmente semplice. A tal fine è naturale far uso della funzione generatrice, ad esempio nella forma $S(P, q, t)$ della proposizione 8.25, osservando che deve essere $p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}$, $1 \leq j \leq n$. Se $H(q, p, t)$ è l'Hamiltoniana, si cerca un'opportuna soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi

$$(8.69) \quad H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

(in pratica, si pretende che S sia la funzione generatrice di una trasformazione che cambia l'Hamiltoniana $H(q, p, t)$ nell'Hamiltoniana identicamente nulla).

Proposizione 8.26: *Sia $S(\alpha_1, \dots, \alpha_n; q_1, \dots, q_n, t)$ un integrale completo²⁵ dell'equazione di Hamilton-Jacobi (8.69) per l'Hamiltoniana $H(q, p, t)$, dipendente da n costanti arbitrarie $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, e soddisfacente la condizione*

$$(8.70) \quad \det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial q_k}\right) \neq 0.$$

Allora le soluzioni del sistema delle equazioni di Hamilton per H si scrivono

$$(8.71) \quad \beta_j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j}, \quad p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

dove β_1, \dots, β_n sono costanti.

Dimostrazione. La funzione S soddisfa le condizioni della proposizione 8.25, e dunque $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ sono coordinate canoniche. Poiché S soddisfa l'equazione (8.69), l'Hamiltoniana trasformata è identicamente nulla, sicché le equazioni di Hamilton sono

$$\dot{\alpha}_j = 0, \quad \dot{\beta}_j = 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

²⁴ La considerazione di un sistema non autonomo qui è essenziale perché si ricercano $2n$ costanti del moto indipendenti, ed una almeno di esse deve dipendere dal tempo.

²⁵ Si intende con questo un integrale (non necessariamente l'integrale generale) che dipende parametricamente da n costanti arbitrarie, qui denotate con $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Per inversione delle (8.71) si ricava allora

$$q = q(\alpha, \beta, t) , \quad p = p(\alpha, \beta, t) ,$$

ossia le soluzioni.

Q.E.D.

Esempio 8.26: *Punto libero.* Per ben comprendere il procedimento appliciamolo al caso elementare, e ben noto, di un punto nello spazio. Dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

(esempio 8.2) si ottiene l'equazione

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Procedendo col metodo di separazione delle variabili, si cerca una soluzione della forma

$$S(x, y, z, t) = X(x) + Y(y) + Z(z) + T(t) ,$$

e quindi l'equazione diventa

$$(8.72) \quad \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{dX}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dY}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dZ}{dz} \right)^2 \right] + \frac{dT}{dt} = 0 ;$$

deve dunque essere²⁶

$$\frac{dX}{dx} = \alpha_x , \quad \frac{dY}{dy} = \alpha_y , \quad \frac{dZ}{dz} = \alpha_z , \quad \frac{dT}{dt} = -\frac{\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2}{2m} ,$$

con $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ costanti arbitrarie. Integrando si ottiene la generatrice

$$S(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, x, y, z, t) = \alpha_x x + \alpha_y y + \alpha_z z - \frac{\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2}{2m} t ,$$

e la corrispondente trasformazione è

$$\begin{aligned} p_x &= \alpha_x , & p_y &= \alpha_y , & p_z &= \alpha_z \\ \beta_x &= x - \frac{\alpha_x}{m} t , & \beta_y &= y - \frac{\alpha_y}{m} t , & \beta_z &= z - \frac{\alpha_z}{m} t . \end{aligned}$$

Per inversione rispetto a x, y, z si ricava la ben nota soluzione.

²⁶ Differenziando la (8.72) rispetto ad x si ottiene $\frac{d}{dx} \left(\frac{dX}{dx} \right)^2 = 0$, e dunque $\frac{dX}{dx}$ deve essere costante. Analogamente, differenziando rispetto a y, z e t si ottiene che sono costanti anche le quantità $\frac{dY}{dy}$, $\frac{dZ}{dz}$ e $\frac{dT}{dt}$. Per la (8.72) le quattro costanti non possono essere tutte arbitrarie, sicché l'ultima può essere calcolata in termini delle prime tre.

8.9 Il teorema di Liouville

Il teorema di Liouville stabilisce una connessione tra l'esistenza di un numero sufficiente di integrali primi e l'integrabilità per quadrature di un sistema Hamiltoniano. Gli integrali primi però oltre alle abituali condizioni di indipendenza devono soddisfare l'ulteriore proprietà di essere *in involuzione*, ossia che tutte le parentesi di Poisson tra di essi siano nulle.

Proposizione 8.27: *Sia dato un sistema Hamiltoniano autonomo con n gradi di libertà ed Hamiltoniana $H(q, p)$, e siano $\Phi_1(q, p), \dots, \Phi_n(q, p)$ integrali primi indipendenti che formano un sistema completo in involuzione. Sia inoltre²⁷*

$$(8.73) \quad \det \left(\frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n)} \right) \neq 0 .$$

Allora il sistema è integrabile per quadrature.

8.9.1 Sistemi in involuzione

Si dice che le r funzioni $\{\Phi_1(q, p), \dots, \Phi_r(q, p)\}$ formano un *sistema in involuzione* se le funzioni sono indipendenti, ossia

$$\text{rank} \left(\frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_r)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} \right) = r ,$$

ed inoltre le parentesi di Poisson tra ogni coppia di funzioni si annulla, ovvero $\{\Phi_j, \Phi_k\} = 0$ for $j, k = 1, \dots, r$.

Esempio 8.27: *Coordinate canoniche.* Le coordinate canoniche stesse forniscono una classe di esempi di sistemi in involuzione. Le n funzioni p_1, \dots, p_n sono un sistema in involuzione, così come lo è un qualunque sottinsieme non vuoto di esse. Lo stesso vale per le n funzioni q_1, \dots, q_n . Più in generale, considerando una qualunque partizione degli indici $\{1, \dots, n\}$ in due classi J, K disgiunte si ha che l'insieme delle n funzioni $\{q_j, p_k\}_{j \in J, k \in K}$ forma un sistema in involuzione. Il lettore noterà che questi insiemi sono costruiti con lo stesso procedimento usato nell'esempio 8.20 per costruire dei sottospazi isotropi o lagrangiani di uno spazio simplettico.

Esempio 8.28: *Le componenti del momento angolare.* Nello spazio delle fasi \mathbb{R}^6 le tre componenti del momento angolare $M_x = yp_z - zp_y$, $M_y = zp_x - xp_z$, $M_z = xp_y - yp_x$ sono indipendenti, ma non formano un sistema in involuzione: la tabella (8.24) lo mostra in modo evidente. Si può però

²⁷ Questa condizione è puramente tecnica, ed ha il solo scopo di assicurare l'invertibilità del sistema di funzioni Φ_1, \dots, Φ_n rispetto alle p_1, \dots, p_n , sicché le Φ_1, \dots, Φ_n possono essere usate (almeno localmente) come coordinate. In generale, si può mostrare che esiste una trasformazione canonica del tipo discusso nell'esempio 8.25 (scambio delle coordinate q_j, p_j) che rende soddisfatta la (8.73).

costruire un sistema di due funzioni in involuzione considerando, ad esempio, il quadrato del modulo del momento angolare $\Gamma^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$ e la sua componente M_z lungo l'asse z . A queste due funzioni se ne può aggiungere una terza $E = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(r)$, dove $V(r)$ è una funzione arbitraria di $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Si riconosce in questa terza funzione l'energia di un punto in un campo di forze centrali. Questo esempio può riformularsi facendo uso delle coordinate sferiche r, ϑ, φ , considerando le tre funzioni

$$\begin{aligned} J &= p_\varphi \\ \Gamma^2 &= p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} \\ E &= \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + V(r) . \end{aligned}$$

In effetti si tratta esattamente delle stesse funzioni definite sopra, scritte in coordinate sferiche invece che cartesiane.

Esempio 8.29: Oscillatori armonici. Consideriamo lo spazio delle fasi \mathbb{R}^{2n} con coordinate canoniche $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$. Le n funzioni

$$\Phi_1 = \frac{x_1^2 + y_1^2}{2}, \dots, \Phi_n = \frac{x_n^2 + y_n^2}{2}$$

formano un sistema in involuzione.

Il lettore avrà forse osservato che in tutti gli esempi illustrati sopra il numero massimo di funzioni di un sistema in involuzione è n , il numero di coppie di coordinate canoniche sullo spazio delle fasi. In effetti, se lo spazio delle fasi ha dimensione $2n$ non è possibile costruire un sistema in involuzione che contenga più di n funzioni indipendenti. Alla radice di questo fatto sta la proprietà, enunciata nel paragrafo 8.5.4, che un sottospazio isotropo di uno spazio simplettico di dimensione $2n$ non può avere dimensione superiore a n .

Diremo che un sistema di funzioni in involuzione è completo se contiene n funzioni.

8.9.2 Sistemi in involuzione e trasformazioni canoniche

Torniamo a considerare le condizioni di canonicità di una trasformazione, espresse mediante le parentesi di Poisson. In particolare, assegnata una trasformazione $q = q(Q, P)$, $p = p(Q, P)$ consideriamo la sua inversa $Q = Q(q, p)$, $P = P(q, p)$. Possiamo allora scrivere le condizioni di canonicità come

$$\{Q_j, Q_k\} = 0, \quad \{P_j, P_k\} = 0, \quad \{Q_j, P_k\} = \delta_{jk} .$$

Se isoliamo la seconda di queste condizioni, ossia $\{P_j, P_k\} = 0$ possiamo leggerla come la richiesta che le funzioni che esprimono i nuovi momenti P in funzione delle vecchie coordinate formino un sistema completo in involuzione.

Viene allora spontaneo chiedersi se ad un sistema completo di funzioni in involuzione $\Phi_1(q, p), \dots, \Phi_n(q, p)$ si possano associare altre n funzioni $\alpha_1(q, p), \dots, \alpha_n(q, p)$ in modo da costruire una trasformazione canonica che assegni alle Φ il ruolo di nuovi momenti ed alle α quello di nuove coordinate. La risposta a questa domanda è positiva, e costituisce la base necessaria per la dimostrazione del teorema di Liouville.

Proposizione 8.28: *Sia $\{\Phi_1(q, p), \dots, \Phi_n(q, p)\}$ un sistema completo in involuzione, e sia soddisfatta l'ulteriore ipotesi*

$$(8.74) \quad \det \left(\frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{\partial(p_1, \dots, p_1)} \right) \neq 0 .$$

Allora esiste una trasformazione canonica locale $(q, p) \rightarrow (\alpha, \Phi)$ la cui funzione generatrice si costruisce per quadrature calcolando

$$(8.75) \quad S(\Phi, q) = \int \sum_j p_j(\Phi, q) dq_j ,$$

dove $p_1(\Phi, q), \dots, p_n(\Phi, q)$ sono ottenute per inversione del sistema di funzioni $\Phi_1(q, p), \dots, \Phi_n(q, p)$.

Dimostrazione. L'invertibilità delle funzioni $\Phi_1(q, p), \dots, \Phi_n(q, p)$ rispetto alle p è assicurata dalla condizione (8.74). Consideriamo la forma differenziale $\sum_j p_j(\Phi, q) dq_j$; si dimostra che si tratta di una forma differenziale esatta. A tale scopo calcoliamo il differenziale dell'identità

$$\Phi_j = \Phi_j(q, p) \Big|_{p=p(\Phi, q)}$$

rispetto alle variabili Φ, q , ossia tenendo conto che nel membro di destra la variabile p deve essere sostituita dalla sua espressione in funzione di Φ, q . Si ottiene

$$d\Phi_j = \sum_{k,l} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_k} \left(\frac{\partial p_k}{\partial \Phi_l} d\Phi_l + \frac{\partial p_k}{\partial q_l} dq_l \right) + \sum_l \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_l} dq_l .$$

Per confronto dei coefficienti di $dq, d\Phi$ si ottengono le identità

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial \Phi_l} &= \delta_{j,l} , \\ \sum_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_l} &= -\frac{\partial \Phi_j}{\partial q_l} , \quad j, l = 1, \dots, n . \end{aligned}$$

Sostituiamo ora la seconda di queste identità nella relazione $\{\Phi_j, \Phi_m\} = 0$, che è l'ipotesi che le funzioni siano in involuzione. Con qualche calcolo si

ottiene

$$\begin{aligned}\{\Phi_j, \Phi_m\} &= \sum_l \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial q_l} \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_l} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_l} \frac{\partial \Phi_m}{\partial q_l} \right) \\ &= - \sum_{l,k} \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_l} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_l} + \sum_{l,k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_l} \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_l} \\ &= - \sum_l \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_l} \sum_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_k} \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_l} - \frac{\partial p_l}{\partial q_k} \right) = 0\end{aligned}$$

(si noti che nella seconda somma della seconda riga si possono scambiare gli indici di somma l e k senza alterare il risultato). Per la condizione (8.74) l'ultima eguaglianza implica

$$\frac{\partial p_k}{\partial q_l} - \frac{\partial p_l}{\partial q_k} = 0, \quad l, k = 1, \dots, n,$$

e questo significa che la forma differenziale $\sum_j p_j dq_j$ è esatta.²⁸ Per integrazione si può dunque costruire la funzione generatrice (8.75), e questa soddisfa la condizione di invertibilità della proposizione 8.25 in virtù della (8.74). Di conseguenza la trasformazione canonica cercata è definita implicitamente da

$$\alpha_j = \frac{\partial S}{\partial \Phi_j}, \quad p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Q.E.D.

8.9.3 Dimostrazione del teorema di Liouville

Per la proposizione 8.28 possiamo costruire per quadrature una trasformazione canonica

$$\alpha = \alpha(q, p), \quad \Phi = \Phi(q, p)$$

tale che Φ_1, \dots, Φ_n siano i nuovi momenti. Per la proprietà di conservazione delle parentesi di Poisson che caratterizza le trasformazioni canoniche è lecito calcolare la parentesi di Poisson tra due funzioni qualsiasi rispetto alle nuove variabili α, Φ . Poiché le funzioni Φ_1, \dots, Φ_n sono integrali primi per H abbiamo allora

$$\{H, \Phi_j\} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Questo significa che l'Hamiltoniana trasformata è indipendente dalle nuove coordinate $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, ossia $H = H(\Phi)$. Le equazioni di Hamilton si scrivono dunque

$$\dot{\alpha}_j = \frac{\partial H}{\partial \Phi_j}, \quad \dot{\Phi}_j = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

²⁸ Ai fini dell'applicazione al teorema di Liouville basta una proprietà locale, quindi non si pongono questioni di dominio.

e sono integrabili in modo elementare. Si osservi che il procedimento richiede solo operazioni algebriche (inclusa l'inversione di funzioni) e quadrature. Il teorema è dunque dimostrato.

Esempio 8.30: *I sistemi ad un grado di libertà.* Consideriamo un punto di massa m in movimento su una retta e soggetto ad un potenziale $V(x)$. L'Hamiltoniana è

$$(8.76) \quad H = \frac{p^2}{2m} + V(x) .$$

Poiché l'Hamiltoniana stessa è una costante del moto, si ha, denotando ancora con $H(x, p) = E$,

$$p = \sqrt{2m[E - V(x)]} ,$$

e dunque

$$(8.77) \quad S(E, x) = \sqrt{2m} \int \sqrt{E - V(x)} \, dx .$$

Da qui si ottiene la trasformazione canonica alle variabili E, α

$$p = \sqrt{2m[E - V(x)]} , \quad \alpha = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} ,$$

e la nuova Hamiltoniana è evidentemente $H = E$. Le soluzioni delle equazioni di Hamilton si scrivono, semplicemente,

$$E(t) = E_0 , \quad \alpha(t) = t - t_0 ,$$

ove E_0 and t_0 sono i valori iniziali dell'energia e del tempo. Il calcolo della soluzione è dunque ricondotto a quello dell'integrale

$$(8.78) \quad t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{E_0 - V(\xi)}} ,$$

dove $x_0 = x(0)$ è la posizione iniziale e E_0 è l'energia iniziale. Quest'ultima formula fornisce riconduce la soluzione del problema ad una quadratura.

Esempio 8.31: *Oscillatori armonici.* Le quantità

$$(8.79) \quad \Phi_l = \frac{1}{2}(y_l^2 + \omega_l^2 x_l^2) , \quad 1 \leq l \leq n$$

formano un sistema completo di integrali primi in involuzione per un sistema di oscillatori armonici con Hamiltoniana

$$(8.80) \quad H = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n (y_l^2 + \omega_l^2 x_l^2) .$$

Si ha inoltre

$$(8.81) \quad H = \sum_l \Phi_l .$$

Si può dunque applicare il teorema di Liouville. Invertendo il sistema (8.79) rispetto alle y si ha

$$y_l = \sqrt{2\Phi_l - \omega_l^2 x_l^2} ,$$

e la funzione generatrice assume la forma

$$S(\Phi, x, t) = \sum_{l=1}^n F_l(\Phi_l, x_l) ,$$

dove

$$F_l(\Phi_l, x_l) = \int \sqrt{2\Phi_l - \omega_l^2 x_l^2} dx_l , \quad 1 \leq l \leq n .$$

La trasformazione canonica per le nuove coordinate si scrive dunque

$$\alpha_l = \frac{\partial S}{\partial \Phi_l} = \int \frac{dx_l}{\sqrt{2\Phi_l - \omega_l^2 x_l^2}} = \frac{1}{\omega_l} \arccos \left(\frac{\omega_l x_l}{\sqrt{2\Phi_l}} \right) .$$

La nuova Hamiltoniana è data chiaramente dalla (8.81), e le equazioni di Hamilton hanno soluzioni della forma

$$\Phi_l(t) = \Phi_{l,0} , \quad \alpha(t) = t - t_0 ,$$

ove t_0 è l'istante iniziale e $\Phi_{l,0}$ sono costanti da calcolarsi mediante i dati iniziali. Per inversione si ottengono infine le soluzioni

$$x_l = \frac{\sqrt{2\Phi_{l,0}}}{\omega_l} \cos \omega_l(t - t_0) .$$

Esempio 8.32: *Moto in un campo di forze centrali.* Come ultimo esempio consideriamo l'Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} \right) + V(r) ,$$

che descrive il moto di un punto materiale in un campo di forze centrali. Come sistema completo di integrali primi in involuzione possiamo usare

$$(8.82) \quad \Gamma = p_\vartheta , \quad \Phi = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 - \frac{\Gamma^2}{r^2} \right) + V(r) .$$

Per inversione si calcola

$$(8.83) \quad p_\vartheta = \Gamma , \quad p_r = \left[2m(\Phi - V(r)) - \frac{\Gamma^2}{r^2} \right]^{1/2} ,$$

e la funzione generatrice è

$$S(\Phi, \Gamma, r, \vartheta) = \int \left[2m(\Phi - V(r)) - \frac{\Gamma^2}{r^2} \right]^{1/2} dr + \int \Gamma d\vartheta .$$

La trasformazione canonica si completa definendo le nuove coordinate φ e γ coniugate a Φ e Γ come

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{\partial S}{\partial \Phi} = m \int \left[2m(\Phi - V(r)) - \frac{\Gamma^2}{r^2} \right]^{-1/2} dr \\ \gamma &= \frac{\partial S}{\partial \Gamma} = -m\Gamma \int \frac{1}{r^2} \left[2m(\Phi - V(r)) - \frac{\Gamma^2}{r^2} \right]^{-1/2} dr + \int \frac{\partial f}{\partial \vartheta} .\end{aligned}$$

Se $V(r)$ è noto, si può calcolare per quadrature

$$(8.84) \quad \varphi = f(\Phi, \Gamma, r) , \quad \gamma = g(\Phi, \Gamma, r) + \vartheta - \vartheta_0 ,$$

dove ϑ_0 è fornito dai dati iniziali, e le funzioni f e g sono calcolate mediante gli integrali della formula scritta sopra. L'Hamiltonian trasformata è $H = \Phi$, sicché le soluzioni delle equazioni di Hamilton si scrivono

$$(8.85) \quad \begin{aligned}\varphi &= t - t_0 , \quad \gamma = \gamma_0 , \\ \Phi &= \Phi_0 , \quad \Gamma = \Gamma_0 .\end{aligned}$$

In questa formula occorre inserire i valori di γ_0, Φ_0 e Γ_0 calcolati mediante i dati iniziali $r_0, \vartheta_0, p_{r,0}, p_{\vartheta,0}$ al tempo t_0 facendo uso delle (8.82) e (8.84). Si possono infine calcolare le soluzioni $r(t), \vartheta(t), p_r(t), p_{\vartheta}(t)$ nelle coordinate originali procedendo all'inversione delle (8.84), ottenendo espressioni della forma

$$r = r(\Phi, \Gamma, \varphi) , \quad \vartheta = \vartheta_0 + \gamma - g(\Phi, \Gamma, r) \Big|_{r=r(\Phi, \Gamma, \varphi)} .$$

Sostituendo la (8.85) in quest'ultima espressione si determinano r e ϑ come funzioni del tempo e dei dati iniziali, ossia

$$r = r(\Phi_0, \Gamma_0, t - t_0) , \quad \vartheta = \vartheta_0 + \gamma_0 - g(\Phi_0, \Gamma_0, r) \Big|_{r=r(\Phi_0, \Gamma_0, t-t_0)} .$$

Si possono infine calcolare i momenti p_r and p_{ϑ} come funzioni del tempo sostituendo la (8.85) e l'ultima formula qui sopra nella (8.83). Con questo si ottiene la soluzione completa del problema.